Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 1 (1h)

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E avec $p \leq n$. Donner une minoration de

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \right) \geqslant n - p \quad \text{et} = p \iff (\varphi_i)_{i=1}^{p} \text{ est libre.}$$

et discuter le cas d'égalité.

2. Donner la définition d'un endomorphisme cyclique (en dimension finie).

$u : E \longrightarrow E$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tq
$\mathrm{Vect}(u^k(x), k \geqslant 0) = E$.

Exercice 2

On se donne $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts et on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On définit également les formes linéaires $\varphi_{i,0} : E \to \mathbb{R}$ et $\varphi_{i,1} : E \to \mathbb{R}$ données par

$$\varphi_{i,0}(P) = P(x_i) \quad \text{et} \quad \varphi_{i,1}(P) = P'(x_i).$$

1. Montrer que la famille $(\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})_{i=1}^{n}$ est une base de l'espace E^*.

2. Calculer la base pré-duale de la famille $(\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})_{i=1}^{n}$. Pour cela, on pourra chercher les polynômes en question sous la forme $P = (aX + b)L_i^2$ avec

$$L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

le $i^{\text{ème}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange.

Exercice 3

Soient E un k-espace vectoriel et $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ un sous-espace de E. On notera $\pi_\mathsf{F} \colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}/\mathsf{F}$ la surjection canonique vers le quotient.

1. Si G est un sous-espace de E, montrer que $\pi_\mathsf{F}(\mathsf{G})$ est un sous-espace de E/F et qu'il est naturellement isomorphe à $\mathsf{G}/(\mathsf{F} \cap \mathsf{G})$.

2. Montrer que $\pi_\mathsf{F}(\mathsf{F} + \mathsf{G}) = \pi_\mathsf{F}(\mathsf{G})$ et en conclure qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_\mathsf{F}(\mathsf{G}) \simeq (\mathsf{F} + \mathsf{G})/\mathsf{F}.$$

3. Vérifier que si $\mathsf{H} \subset \mathsf{E}/\mathsf{F}$ est un sous-espace vectoriel, alors $\pi_\mathsf{F}^{-1}(\mathsf{H})$ est un sous-espace de E et que de plus $\mathsf{F} \subset \pi_\mathsf{F}^{-1}(\mathsf{H})$.

4. En déduire que les ensembles suivants sont en bijection :

$$\{\mathsf{G} \subset \mathsf{E} \mid \mathsf{G} \text{ sous-espace de } \mathsf{E} \text{ avec } \mathsf{F} \subset \mathsf{G} \subset \mathsf{E}\} \quad \text{et} \quad \{\mathsf{H} \subset \mathsf{E}/\mathsf{F} \mid \mathsf{H} \text{ sous-espace de } \mathsf{E}/\mathsf{F}\}.$$

Exercice 2 :

1) Commençons par remarquer que $\mathrm{Card}(\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})_{i=0}^{n} = 2n+2$ et que $2n+2 = \dim \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre.

D'après la question de cours n°1, la famille $(\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})_{i=0}^{n}$ est libre $\iff \left(\varphi_{i,0}(P) = \varphi_{i,1}(P) = 0 \ \forall i = 0..n \Rightarrow P = 0 \right)$

Or si un polynôme P vérifie $\varphi_{i,0}(P) = P(x_i) = 0 = P'(x_i) = \varphi_{i,1}(P)$ on en déduit que x_i est racine double de P (pour tout i). Le poly. P est donc multiple de $\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)^2$.

Comme $\deg\left(\prod_{i=0}^{n}(X-x_i)^2\right) = 2n+2$ et que $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ on en conclut que $P = 0$ et

$$\boxed{(\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})_{i=0}^{n} \text{ est une base de } \left(\mathbb{R}_{2n+1}[X]\right)^*.}$$

2) On cherche une famille de polynômes $(P_i, Q_i)_{i=0}^{n}$ avec

$$(a) \begin{cases} P_i(x_j) = P_i'(x_j) = Q_i(x_j) = Q_i'(x_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ P_i(x_i) = 1 = Q_i'(x_i) & \text{et } P_i'(x_i) = 0 = Q(x_i) \end{cases}$$

La condition (a) montre que x_j est racine double de P_i et Q_i ($\forall j \neq i$). Les polynômes P_i et Q_i sont donc multiples de L_i^2. On cherche P_i sous la forme $P_i = (a_i X + b_i) L_i^2$ et on écrit les conditions

$$\begin{cases} P_i(x_i) = 1 \\ P_i'(x_i) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_i x_i + b_i) L_i^2(x_i) = 1 \\ a_i L_i^2(x_i) + (a_i x_i + b_i)\, 2 L_i(x_i) L_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$(L_i(x_i) = 1) \qquad \iff \begin{cases} a_i x_i + b_i = 1 \\ a_i + 2L_i'(x_i) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_i = 1 + 2L_i'(x_i)\, x_i \\ a_i = -2L_i'(x_i) \end{cases}$$

On obtient donc $P_i = \left(1 - 2L_i'(x_i)(X - x_i)\right) L_i^2$.

On procède de même pour Q_i et on trouve :

$$\boxed{\left(\left(1-2L_i'(x_i)(X-x_i)\right)L_i^2,\ (X-x_i)L_i^2\right) \text{ est la base préduale de la base } (\varphi_{i,0},\varphi_{i,1})_{i=0}^{n}.}$$

Rq : L'interpolation de Lagrange permet de trouver un polynôme en fixant les valeurs en les (x_i). L'exercice 2 est un cas particulier de l'interpolation d'Hermite : on peut fixer les valeurs de P et de la dérivée P' en les x_i. Le prix à payer est l'augmentation du degré. Plus généralement, on peut fixer les valeurs de $P^{(k)}(x_i)$ pour $0 \leq k \leq n_i$ (avec n_i fixé à l'avance) : il faut travailler avec des polynômes de degré

$$d = \sum_{i=0}^{n} (n_i + 1) - 1.$$

Exercice 3

1) On applique le théorème d'isom. pour : $\pi_F|_G : G \longrightarrow \pi_F(G)$

Par construction, cette application est surjective et son noyau est

$$\operatorname{Ker}(\pi_F|G) = \operatorname{Ker}(\pi_F) \cap G = F \cap G.$$

On a donc $\boxed{\pi_F(G) \simeq G/F\cap G.}$

2) Si $x \in F$ et $y \in G$, on a $\pi_F(x+y) = \pi_F(x) + \pi_F(y) = \pi_F(y)$

et donc $\underline{\pi_F(F+G) = \pi_F(G).}$ En appliquant la question précédente à $F+G$ et en remarquant que $F \cap (F+G) = F$ (car $F \subset F+G$) on a bien :

$$\boxed{\pi_F(G) = \pi_F(F+G) \simeq F+G/F.}$$

3) Si $H \subseteq E/F$ (ss-espace) alors $\pi_F^{-1}(H)$ est un sous-espace de E (résultat général sur les applications linéaires)

et de plus, comme $0 \in H$, on a $\underline{F = \pi_F^{-1}(0) \subseteq \pi_F^{-1}(H).}$

4) On considère les applications :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{E} = \{G \text{ ss espace de } E \text{ avec } F \subseteq G\} \longrightarrow \mathcal{Q} = \{H \text{ ss-espace de } E/F\} \\ G \longmapsto \pi_F(G) \end{cases}$$

et $\Psi : \begin{cases} \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{E} \\ H \longmapsto \pi_F^{-1}(H). \end{cases}$ (Ψ bien définie d'après **3**)

On vérifie que si $G \subseteq E$ est un sous-espace, alors $\pi_F^{-1}(\pi_F(G)) = F+G$
En effet, si $z \in \pi_F^{-1}(\pi_F(G))$, cela signifie que $\pi_F(z) \in \pi_F(G)$

et donc $\exists y \in G$ tq $\pi_F(z) = \pi_F(y) \Rightarrow \pi_F(z-y) = 0 \Rightarrow z-y \in F$.

D'où $z \in G+F$ et l'autre inclusion étant évidente, on a bien montré que $\pi_F^{-1}(\pi_F(G)) = F+G$.

Si G vérifie $F \subseteq G$, on a donc $\pi_F^{-1}(\pi_F(G)) = G$, égalité que l'on peut réécrire : $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

De plus, la surjectivité de π_F entraîne que $\pi_F(\pi_F^{-1}(H)) = H$ (résultat général de théorie des ensembles), ce qui signifie

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}}.$$

$$\boxed{\text{Les applications } \Phi \text{ et } \Psi \text{ sont donc des bijections réciproques et } \mathcal{E} \text{ est en bijection avec } \mathcal{Q}.}$$