Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 2 (1h)

Barème indicatif : 2/7/6/5.

Exercice 1 (Question de cours)

Soient E un k-espace vectoriel (avec k de caractéristique $\neq 2$) et $q \colon E \to k$ une forme quadratique.

Donner la définition du noyau de q (noté $N(q)$) et celle du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$. Préciser l'inclusion qui est toujours vraie et donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Correction : cf. cours. Pour l'exemple, on peut prendre le plan hyperbolique $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ sur k^2 avec $N(q) = 0$ mais $\mathcal{C}(q) = \{x1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme.

1. Rappeler la caractérisation du caractère cyclique de u en termes de μ_u son polynôme minimal.

On considère à partir de maintenant F et $G \subset E$ deux sous-espaces u-stables de E tels que $E = F \oplus G$. On note $v = u_{|F}$ et $w = u_{|G}$ les restrictions de u à F et G.

2. Calculer μ_u en fonction de μ_v et μ_w.

3. Montrer que si v et w sont cycliques avec μ_v et μ_w premiers entre eux, alors u l'est aussi.

4. Réciproquement, montrer[1] que si u est cyclique alors v et w le sont et μ_v et μ_v et μ_w sont premiers entre eux. On pourra raisonner sur les degrés des polynômes μ_u, μ_v et μ_w.

Correction :

1. u est cyclique si et seulement si $\mu = \chi_u$ si et seulement si $\deg(\mu_u) = \dim(E)$.
2. $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w)$. En effet, μ_u annule v et w donc il est multiple de μ_v et de μ_w et donc multiple de $\mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w)$. Réciproquement, en raisonnant par blocs, on constate que $\mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w)$ annule μ_u donc cela donne l'autre relation de divisibilité.
3. Dans ce cas, on a $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w) = \mu_v\mu_w$ et donc
$$\deg(\mu_u) = \deg(\mu_v) + \deg(\mu_w) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$
car v et w sont cycliques. D'après la question **1**, on en déduit que u est cyclique.

1. sans vous référer à l'exercice de TD où cette question a été traitée !

4. Si u est cyclique, on a :

$$\begin{aligned}\dim(E) = \deg(\mu_u) = \deg(\mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w)) \le \deg(\mu_v\mu_w) &= \deg(\mu_v) + \deg(\mu_w)\\ &\le \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)\end{aligned}$$

car $\mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w)$ divise $\mu_v\mu_w$. On en déduit donc que les inégalités sont des égalités et finalement : $\deg(\mu_v) = \dim(F)$, $\deg(\mu_w) = \dim(G)$ et $\mathrm{ppcm}(\mu_v, \mu_w) = \mu_v\mu_w$.

Exercice 3

Pour un entier $d \ge 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note

$$J_d(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

le bloc de Jordan de taille d associé à la valeur propre λ.

1. Calculer le polynôme minimal et le rang de $J_d(\lambda)$ en fonction de d et λ.

2. En déduire que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \ \deg(\mu_A) \le \mathrm{rg}(A) + 1$$

3. Décrire le cas d'égalité en donnant la décomposition de Jordan d'une matrice A qui vérifie $\deg(\mu_A) = \mathrm{rg}(A) + 1$.

Correction :

1. Le polynôme minimal est

$$\mu_{J_d(\lambda)} = (X - \lambda)^d$$

et on a

$$\mathrm{rg}\,(J_d(\lambda)) = \begin{cases} d-1 & \text{si } \lambda = 0, \\ d & \text{si } \lambda \ne 0. \end{cases}$$

2. Si le polynôme minimal de A est

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{d_i}$$

on sait que, dans la décomposition de Jordan, les blocs de Jordan associés à la valeur propre λ_i auront une taille inférieure à d_i. Pour chaque bloc, on a l'inégalité attendue et, les blocs étant indépendants entre eux, les rangs s'ajoutent pour donner le rang de A (écrivez la matrice et vous verrez que c'est très clair !).

3. Si A vérifie $\deg(\mu_A) = \mathrm{rg}(A) + 1$, alors $\mathrm{rg}(A) = \deg(\mu_A) - 1 < n$ et donc 0 est valeur propre de A.

— Si 0 est l'unique valeur propre de A, A est nilpotente $\mu_A = X^d$. On sait qu'il y a un bloc de Jordan $J_d(0)$. Si A admet un autre bloc de Jordan $J_m(0)$ avec $1 < m \leq d$, alors

$$\mathrm{rg}(A) + 1 \geq \mathrm{rg}(J_d(0)) + \mathrm{rg}(J_m(0)) + 1 = d + m - 1 > d = \deg(A).$$

On en déduit que dans le cas nilpotent A n'a qu'un seul bloc de Jordan de taille d et éventuellement des blocs de Jordan de taille 1 :

$$A \sim \begin{pmatrix} J_d(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_1(0) \end{pmatrix}.$$

— Si la matrice A a une valeur propre non nulle λ, le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il n'y a qu'un seul bloc de Jordan pour λ (sinon de nouveau le rang serait trop élevé par rapport à l'exposant de $(X - \lambda)$ dans μ_A). Ceci étant vérifié pour toutes les valeurs propres non nulles de A, on en déduit que la forme de Jordan de A est : pour chaque valeur propre λ_i $(1 \leq i \leq r)$ non nul, un unique bloc de Jordan $J_{d_i}(\lambda_i)$, éventuellement un bloc $J_d(0)$ (avec $d \geq 2$) et des blocs $J_1(0)$. Pour une telle matrice, on a bien :

$$\mu_A = X^d \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{d_i} \quad \text{de degré } \deg(\mu_A) = d + \sum_{i=1}^{r} d_i$$

et son rang vaut

$$\mathrm{rg}(A) = d - 1 + \sum_{i=1}^{r} d_i.$$

Exercice 4

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $\mathrm{rg}(A)$.

2. En remarquant que $A^2 = 0$, donner la décomposition de Jordan de A.

3. Donner une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle A est sous forme de Jordan.

Correction :

1. On a $C_2 = 2C_1$, $C_5 = C_1$ donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_3)$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$.
2. Comme $A \neq 0$ et $A^2 = 0$, on sait que la décomposition de Jordan de A fait apparaître au moins un bloc de taille 2. Un bloc $J_2(0)$ est de rang 1 donc il y en a 2 et on a nécessairement
$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix}$$
3. On remarque que $A(e_1) = C_1$ et $A(e_3) = C_3$ sont linéairement indépendants et comme visiblement $e_4 \in \mathrm{Ker}(A)$, on peut choisir la base
$$\mathcal{B} = (A(e_1), e_1, A(e_3), e_3, e_4)$$
qui met A sous forme de Jordan.