Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 3 (1h30)

Université de Rennes

Un barème est mentionné à titre indicatif pour chaque exercice. Il n'a bien sûr aucune valeur contractuelle.

Exercice 1 — Barème indicatif : 5 points (2/1/1/1)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme et $F \subseteq E$ un sous-espace u stable de E. On notera $\pi_F\colon E \to E/F$ la projection canonique de E vers le quotient E/F et $u_F \in \mathrm{End}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

1. Rappeler de quelle façon u induit un endomorphisme de E/F que nous noterons $\overline{u} \in \mathrm{End}(E/F)$. Montrer que les polynômes caractéristiques vérifient la relation :

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{\overline{u}}.$$

Comme F est u-stable, on a $u(F) \subset F$ et l'application $\pi_F \circ u\colon E \to F$ vérifie $\pi_F \circ u(F) = \{0\}$. Par propriété universelle du quotient, on en déduit qu'il existe $\overline{u}\colon E/F \to E/F$ tel que $\pi_F \circ u = \overline{u} \circ \pi_F$.

Si on choisit G un supplémentaire de F dans E, la projection π_F restreinte à G réalise un isomorphisme entre G et E/F. Si $z \in E/F$, il existe donc un unique $x \in G$ tel que $z = \pi_F(x)$ et on a $\overline{u}(z) = \pi_F(u(x))$. Cela signifie que si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base adapatée à la décomposition $E = F \oplus G$, on a une décomposition par bloc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F} & * \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\overline{\mathcal{B}_G}}(\overline{u}) \end{pmatrix}.$$

Ci-dessus, la notation $\overline{\mathcal{B}_G}$ désigne la base de E/F induite par celle de G. Avec cette décomposition par blocs, il est évident que les polynômes caractéristiques vérifient

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{\overline{u}}.$$

2. Montrer que si $x \in E$, les sous-espaces cycliques satisfont à l'égalité :

$$\pi_F\left(K[u] \cdot x\right) = K[\overline{u}] \cdot \pi_F(x).$$

La notation $K[u] \cdot x$ désigne le sous-espace cyclique engendré par x :

$$K[u] \cdot x := \{P(u)(x) \mid P \in K[X]\} = \mathrm{Vect}\left(u^j(x), j \geq 0\right) \subset E.$$

Si $y = u^j(x)$ (pour $j \geq 0$), alors on a

$$\pi_F(y) = \pi_F \circ u^j(x) = \overline{u} \circ \pi_F \circ \overline{u}^{j-1}(x) = \cdots = \overline{u}^j\left(\pi_F(x)\right).$$

Par linéarité, on a alors

$$\forall P \in K[X],\ \pi_F(P(u)(x)) = P(\overline{u})\left(\pi_F(x)\right)$$

ce qui est exactement la relation cherchée.

3. En déduire que si u est cyclique, alors $\overline{u}$ l'est également.

Si u est cyclique, il existe $x \in E$ tel que $K[u] \cdot x = E$ et, pour ce vecteur, on en déduit donc

$$K[\overline{u}] \cdot \pi_F(x) = \pi_F\left(K[u] \cdot x\right) = \pi_F(E) = F$$

car l'application quotient est surjective. Ceci signifie bien que $\overline{u}$ est cyclique pour le vecteur $\pi_F(x)$.

4. Donner un exemple de situation où u_F et $\overline{u}$ sont cycliques alors que u ne l'est pas.

Si on se place sur $E = K^2$ et $F = Ke_1$, l'application $u = \mathrm{Id}_E$ n'est pas cyclique mais elle le devient sur $E/F \simeq K$.

Exercice 2 — Barème indicatif : 5 points (1/1/1/1/1)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme. On rappelle que u est dit *hermitien* si $u^* = u$ et *anti-hermitien* si $u^* = -u$.

1. On suppose que u est hermitien. Démontrer que $\langle x, y \rangle_u := \langle u(x), y \rangle$ est une forme hermitienne sur E. À quelle condition (portant sur u) cette forme est-elle un produit scalaire hermitien sur E ?

La condition de sesquilinéarité est bien évidemment satisfaite et la symétrie hermitien provient du caractère hermitien de u. En effet, si x et $y \in E$, on a :

$$\langle x, y \rangle_u = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \overline{\langle u(y), x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle}_u.$$

Cette forme hermitienne est un produit scalaire si et seulement u est défini positif.

2. On suppose que u est anti-hermitien.

2.1 Justifier qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u et que les valeurs propres de u sont imaginaires pures.

Un endomorphisme anti-hermitien est en particulier normal donc il est diagonalisable en base orthonormée. De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle = \langle x, -u(x)\rangle = \langle x, -\lambda x\rangle = -\overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

et donc $\lambda = -\overline{\lambda}$ et λ est imaginaire pure.

2.2 Démontrer que $|\det(\mathrm{Id}_E + u)| \geq 1$.

Avec ci-dessus, on a

$$\det(\mathrm{Id}_E + u) = \prod_{k=1} (1 + i\mu_k)$$

avec $\lambda_k = i\mu_k$ les valeurs propres de u. On en déduit immédiatement la minoration annoncée.

Soit $n \geq 1$. On considère $E = \mathbb{C}^n$ que l'on munit du produit scalaire hermitien canonique : $\langle X, Y\rangle = {}^t X\overline{Y}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $H = \frac{1}{2}(M + M^*)$ est hermitienne définie positive.

3. Démontrer que $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice hermitienne définie positive est en particulier de rang maximal donc inversible.

4. On considère $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ le produit scalaire hermitien associé à H comme à la question **1**. Soit $B = \frac{1}{2}(M - M^*)$. Démontrer que l'endomorphisme

$$u_M : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & H^{-1}BX \end{array} \right.$$

est un endomorphisme anti-hermitien de l'espace hermitien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$.

On calcule pour $X, Y \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \langle u_M(X), Y\rangle_H &= \langle H\left(U_M(X)\right), Y\rangle = \langle HH^{-1}BX, Y\rangle \\ &= \langle BX, Y\rangle = \langle X, -BY\rangle = -\langle H^{-1}HX, BY\rangle \\ &= -\langle HX, H^{-1}BY\rangle = -\langle X, u_M(Y)\rangle_H \end{aligned}$$

et donc u_M est bien anti-hermitien pour le produit scalaire considéré. Si dessus, on a utilisé le fait que B est anti-hermitienne ($4^{\text{ième}}$ égalité) et que H^{-1} est elle hermitienne ($6^{\text{ième}}$ égalité).

5. Déduire de ce qui précède que $\det H \leq |\det M|$.

D'après la question **2.2**, on a $|\det(\mathrm{Id}_E + u_M)| \geq 1$ et donc :

$$1 \leq |\det(\mathrm{Id}_E + u_M)| = \left|\det(I_n + H^{-1}B)\right| = \frac{|\det(H + B)|}{\det(H)} = \frac{|\det(M)|}{\det(H)}$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée.

Exercice 3 — Barème indicatif : 10 points (4/4/2)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit q et q' deux formes quadratiques **non dégénérées** sur E, dont on note b et b' les formes polaires.

1. On rappelle que le cône isotrope de la forme q est

$$\mathcal{C}(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

1.1 Montrer que $\mathcal{C}(q)$ est soit un point, soit une réunion de droites vectorielles. Donner des exemples de formes quadratiques q_1 et q_2 telles que $\mathcal{C}(q_1)$ (resp. $\mathcal{C}(q_2)$) est une réunion finie (resp. infinie) de droites.

Si $x \in \mathcal{C}(q)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) = 0$ et donc $\mathcal{C}(q)$ est stable par homothétie : c'est donc soit le singleton $\{0\}$ soit une réunion de droites. Sur $\mathbb{R}^2$, la forme $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$ est non dégénérée et son cône isotrope est la réunion de 2 droites ($\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$). Sur $\mathbb{R}^3$, la forme $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ est non dégénérée et son cône isotrope est une surface qui est une réunion d'une infinité de droites.

1.2 Montrer que si q et q' sont proportionnelles (c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $q' = \lambda q$), alors $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$.

C'est évident.

1.3 Montrer que si $\mathcal{C}(q) = \{0\}$, alors q est de signature $(n, 0)$ ou $(0, n)$.

Si la signature de q est de la forme $s, n - s$ avec $0 < s < n$, on sait alors que l'on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q avec $q(e_k) = 1$ pour $k = 1, \dots s$ et $q(e_j) = -1$ pour $j > s$. Le vecteur (non nul) $x = e_1 - e_{s+1}$ est alors isotrope.

1.4 En déduire que, en général, l'égalité $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$ n'implique pas que q et q' sont proportionnelles. Les deux formes quadratiques $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $q_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ sont définies positives sur $\mathbb{R}^2$ (donc anisotropes) et elles ne sont évidemment pas proportionnelles.

Nous allons montrer que, en dehors de l'obstruction soulevée à la question **1.4**, la réciproque de la question **1.2** est vraie. On suppose donc à partir de cette question que

$$\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q') \neq \{0\},$$

et notre objectif est de montrer que q et q' sont proportionnelles.

2. Soit y un vecteur isotrope non nul pour q et q'.

2.1 On note H_y (resp. H'_y) le sous-espace orthogonal à $\mathrm{Vect}(y)$ par rapport à la forme bilinéaire b (resp. b'). Pourquoi ces sous-espaces sont-ils des hyperplans de E ?

$H_y = \{x \in E \mid b(y,x) = 0\} = \ker b(y,\cdot)$. Or comme q est non dégénérée, l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \varphi_q & : & E & \longrightarrow & E^* \\ & & y & \longmapsto & b(y,\cdot) \end{array}$$

est un isomorphisme, donc $b(y,\cdot)$ est une forme linéaire *non nulle* dès lors que y est non nul. Son noyau est alors un hyperplan de E. C'est exactement le même argument pour H'_y.

2.2 Soit $x \in E$. On définit $D_{x,y} = \{x + \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Calculer $q(x + \alpha y)$ et en déduire que si $x \in H_y$, alors

$$D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q) = \begin{cases} D_{x,y} & \text{si } x \in \mathcal{C}(q) \\ \emptyset & \text{si } x \notin \mathcal{C}(q). \end{cases}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$q(x + \alpha y) = b(x + \alpha y, x + \alpha y) = q(x) + 2\alpha b(x,y) + \alpha^2 q(y),$$

en utilisant la bilinéarité et la symétrie de la forme b. Puisque y est un vecteur isotrope, on a $q(y) = 0$, et donc $q(x + \alpha y) = q(x) + 2\alpha b(x,y)$. Si de plus $x \in H_y$, alors le terme $b(x,y)$ est aussi nul, et donc $q(x + \alpha y) = q(x)$. On en déduit que si $x \in \mathcal{C}(q)$ alors pour tout $z \in D_{x,y}$, on a $q(z) = 0$, c'est-à-dire $D_{x,y} \subseteq \mathcal{C}(q)$, ce qui donne la première alternative. Si par contre $q(x) \neq 0$, alors pour tout $z \in D_{u,v}$, on a $q(z) \neq 0$, ce qui montre que $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q) = \emptyset$.

2.3 Montrer que si $x \notin H_y$ alors $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ est réduit à un point que l'on précisera.

Si $x \notin H_y$ alors $q(x+\alpha y) = q(x) + 2\alpha b(x,y)$ avec $b(x,y) \neq 0$. Donc $q(x+\alpha y) = 0$ pour un unique α (qui est $-q(x)/2b(x,y)$). Ainsi,

$$D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q) = \left\{ x - \frac{q(x)}{2b(x,y)} y \right\}.$$

2.4 Déduire des questions **2.2** et **2.3** que considérer le cardinal de $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ suffit à distinguer les vecteurs x qui appartiennent à H_y de ceux qui n'y appartiennent pas. En déduire que $H_y = H'_y$.

D'après **2.2** et **2.3**, on a $x \in H_y$ si et seulement si $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ est infini (en fait : une droite affine) ou l'ensemble vide. Comme $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$ par hypothèse, ceci est équivalent à demander à ce que $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q')$ soit infini ou l'ensemble vide, c'est-à-dire à ce que x appartienne à H'_u (car les résultats de **2.2** et **2.3** s'applique tout aussi bien à q').

3. On note toujours y un vecteur isotrope pour q et q' comme au début de la question **2**.

3.1 Montrer qu'il existe $\lambda_y \in \mathbb{R}^\times$ tel que $b'(y,\cdot) = \lambda_y b(y,\cdot)$.

On utilise le résultat du cours qui dit que deux formes linéaires (ici $b(y,\cdot)$ et $b'(y,\cdot)$) ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

3.2 Montrer que pour tout $x \notin H_y$, $q'(x) = \lambda_y q(x)$ (penser à la question **2.3**).

Si $x \notin H_y$, alors les singletons $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ et $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q')$ sont égaux, et donc

$$x - \frac{q(x)}{2b(x,y)} y = x - \frac{q'(x)}{2b'(x,y)} y$$

d'où

$$\frac{q(x)}{b(x,y)} = \frac{q'(x)}{b'(x,y)} = \frac{q'(x)}{\lambda_y b(x,y)}$$

d'après **3.1**. En simplifiant par $b(x,y)$, on en déduit le résultat voulu.

3.3 Montrer que le complémentaire de H_y dans E est une partie dense dans E et conclure.

Soit $x \in E \setminus H_y$. Si $w \in H_y$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $b(y, w + \varepsilon x) = \varepsilon b(y,x) \neq 0$, et donc $w + \varepsilon x \notin H_y$. Comme $w + \varepsilon x$ tend vers w lorsque ε tend vers 0, on a bien montré la densité de $E \setminus H_y$ dans E.
Pour conclure, il suffit de dire que q' et $\lambda_y q$ coïncident sur cette partie dense d'après **3.2**, et qu'elles sont continues (par exemple parce qu'une fois que l'on a fixé une base de E, leur écriture en coordonnées est polynomiale).