Algèbre linéaire et bilinéaire

Formes quadratiques

Exercice 1 [Orthogonalité]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q (de forme polaire f_g et de noyau $N(q)$). Si $F \subset E$ est un sous-espace, on note $F^\perp \subset E$ son orthogonal pour la forme q :

$$F^\perp :=\{x \in E \mid \forall y \in F,\ f_q(x,y)=0\}.$$

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. On note $\hat{f}_q : E \to E^*$ l'application induite par f_q. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace, alors on a

$$F^\perp = {}^\circ\left(\hat{f}_q(F)\right)$$

où ${}^\circ A$ (avec $A \subset E^*$) est l'orthogonal pour la dualité, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E qui s'annulent sur les éléments de A. En déduire que

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) + \dim(N(q) \cap F). \tag{1}$$

3. Si F est un sous-espace, montrer que $F + N(q) \subset F^{\perp\perp}$. Calculer $\dim(F^{\perp\perp})$ et conclure que $F + N(q) = F^{\perp\perp}$ grâce à la formule de Grassman.

4. Vérifier ces affirmations sur l'espace $E = k^3$ muni de la forme quadratique dont l'expression dans la base canonique est $q(x,y,z) = 2xy$ et en fixant $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Exercice 2 [Orthogonalité II]

On se donne (E, q) comme dans l'exercice 1.

1. Pour F et G deux sous-espaces de E, montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

2. On considère le cas $E = k^2$ et $q(x,y) = x^2$. On pose alors $F = k\cdot(1,1)$ et $G = k\cdot(1,-1)$. Calculer $F \perp$ et $G^\perp$ et montrer que l'inclusion ci-dessus peut être stricte.

3. Montrer que si q est non dégénérée, on a l'égalité $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 3 [Restriction d'une forme non dégénérée]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q et F un sous-espace de E.

1. Calculer $N\left(q_{|F}\right)$ et en déduire que $q_{|F}$ est non dégénérée si et seulement si $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

2. On suppose maintenant q non dégénérée (sur E). Montrer que $q_{|F}$ est non dégénérée si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp}$ (utiliser la formule (1)).

Exercice 4 [Forme quadratique sur les matrices]

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ sur $\mathrm{M}_n(k)$ (avec k un corps de caractéristique différente de 2).

1. Montrer que cette forme est non dégénérée.

2. Calculer sa signature lorsque $k = \mathbb{R}$ (penser aux matrices symétriques et antisymétriques).

3. Que se passe-t-il si l'on considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$?

Exercice 5 [Algorithme de Gauß]

Appliquer l'algorithme de Gauß aux formes quadratiques réelles suivantes :

(1) $q_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz$;

(2) $q_2(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$;

(3) $q_3(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$;

(4) $q_4(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$.

Dans chaque cas, préciser la signature de la forme quadratique.

Exercice 6 [Forme quadratique définie (cas réel)]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique anisotrope : $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Montrer que q est définie positive ou définie négative.

Exercice 7 [Partie réelle d'une forme complexe]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Montrer que l'expression $q_{\mathbb{R}}(x) = \mathrm{Re}(q(x))$ définit une forme quadratique sur le sous-espace réel E (en oubliant que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et calculer la signature de $q_{\mathbb{R}}$ en fonction du rang de q.

Pour aller plus loin

Exercice 8 [Relation de congruence]

On considère la relation de congruence sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ tout entier et on cherche à décrire les classes d'équivalence $M \sim N \iff \exists\, P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\ M = PN\,{}^tP$.

1. Montrer que la décomposition $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{S}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{A}_2(\mathbb{C})$ est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Donner un représentant de chaque classe de $\mathrm{S}_2(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{A}_2(\mathbb{C})$.

2. On suppose que $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique (avec $S \neq 0 \neq A$). Si S est de rang 1, montrer d'abord que M est congruente à $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Si maintenant S est de rang 2, montrer que M est congruente à $M_z := \begin{pmatrix} 1 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M_z \sim M_w \iff z = \pm w$.

4. Conclure que les classes de congruences sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ sont représentées par les matrices

$$0,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{I}_2,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_z \sim M_{-z} \quad (z \neq 0).$$

Exercice 9 [Formes sur $\mathbb{Q}$]

1. Montrer que si p_1 et p_2 sont deux entiers premiers distincts, alors $\overline{p_1} \neq \overline{p_2}$ dans $\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$.

2. En déduire que $\mathbb{Q}^n$ admet une infinité de formes quadratiques non congruentes.

Exercice 10 [Sous-espaces totalement isotropes]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni que q non dégénérée.

1. Si F est un sous-espace *totalement isotrope* (cela signifie que $q_{|F} = 0$), montrer que $F \subset F^\perp$ et en déduire que $2\dim(F) \leq \dim(E)$.

2. Donner un exemple où l'égalité se produit.

3. On suppose que E possède un vecteur isotrope non nul $x \in E$ (avec donc $q(x) = 0$). Montrer qu'il existe $y \in E$ avec $q(y) = 0$ et $f_q(x, y) = 1$, c'est-à-dire que E contient un plan hyperbolique U.

4. Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale

$$E = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus F$$

avec $q_{|U_i}$ hyperbolique pour tout $i = 1 \ldots m$ et $q_{|F}$ *anisotrope*, c'est-à-dire : $x \in F$ et $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

5. Montrer enfin que $2m \leq \dim(E)$.

Exercice 11 [Donné au CC3 en 2024–2025]

On note $\mathcal{N}_n(K) \subset M_n(K)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \geq 1$ (avec K un corps de caractéristique différente de 2) et $\mathcal{T}_n(K)$ (resp. $\mathcal{T}_n^+(K)$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n (resp. l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle). On souhaite montrer l'énoncé suivant :

$$\text{Si } V \subset \mathcal{N}_n(K) \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_n(K), \text{ alors } \dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. Donner un exemple de sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ avec $\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. On considère la forme quadratique $q\colon M_n(K) \to K$ définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et on note $(E_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ la base canonique de $M_n(K)$.

2.a. Calculer $\mathrm{Tr}(ME_{i,j})$ pour $M \in M_n(K)$ et $1 \leq i, j \leq n$.

2.b. Montrer que q est non dégénérée et que $q(M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{N}_n(K)$.

2.c. En déduire que, si $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ est un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{Tr}(MN) = 0$ pour tout $(M, N) \in V$.

3. Dans cette question, on suppose que le corps K est celui des nombres réels $K = \mathbb{R}$.

3.a. Calculer la signature de la forme q en exhibant des sous-espaces de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale sur lesquels la forme q est définie négative/positive.

3.b. Soit alors $V \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Pour cela, raisonner par l'absurde et considérer $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques).

4. On revient au cas général où le corps K est quelconque. On se donne $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ et on note $V_T\colon = V \cap \mathcal{T}_n^+(K)$. On fixe également $W \subset V$ un supplémentaire de V_T dans V : $V = V_T \oplus W$.

4.a. Calculer $\mathcal{T}_n^+(K)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{T}_n^+(K)$ pour la forme q et en déduire que $\mathcal{N}_n(K) \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp = \mathcal{T}_n^+(K)$.

4.b. Montrer que $W \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp \subset V_T$ puis que $W \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp = \{0\}$.

4.c. Établir l'inclusion $W \oplus \mathcal{T}_n^+(K)^\perp \subset V_T^\perp$ et en déduire que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.