**Algèbre linéaire et bilinéaire**

*Espaces euclidiens et hermitiens*

## Exercice 1 [Un calcul d'adjoint]

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^t A\overline{B}\right).$$

**1.** Montrer que c'est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{C})$ et que la norme associée vérifie :

$$\forall\, A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,.$$

**2.** Calculer la norme de la forme linéaire

$$\mathrm{Tr} \colon \left\{ \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A). \end{array} \right.$$

**3.** On fixe $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on considère l'application linéaire

$$\Phi_A \colon \left\{ \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & {}^t AXA. \end{array} \right.$$

Calculer l'adjoint (pour le produit scalaire ci-dessus) de $\Phi_A$.

## Exercice 2 [Matrice de Gram]

Soit $E$ un espace euclidien dont on note $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ le produit scalaire. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $E$, on pose

$$G(u_1, \ldots, u_p) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{R}).$$

**1.** Montrer que $G(u_1, \ldots, u_p)$ est symétrique positive et que

$$\mathrm{rg}(G(u_1, \ldots, u_p)) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p).$$

**2.** Montrer que toute matrice symétrique positive peut s'écrire sous la forme $G(u_1, \ldots, u_p)$.

**3.** Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ deux familles de vecteurs de $E$. Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i = 1 \ldots p$ si et seulement si $G(u_1, \ldots, u_p) = G(v_1, \ldots, v_p)$.

## Exercice 3 [Endomorphismes hermitiens]

Soit $E$ un espace **hermitien**. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien et $\mathcal{H}(E)$ (resp. $\mathcal{H}^+(E)$) l'ensemble des endomorphismes hermitiens (resp. hermitiens positifs) de $E$.

**1.** Soit $u \in \text{End}(E)$ vérifiant $\forall x \in E,\ \langle x, u(x) \rangle = 0$. Montrer que $u = 0$. Que peut-on dire si $E$ est seulement supposé euclidien ?

**2.** Soit toujours $u \in \text{End}(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{H}(E)$ (resp. $u \in \mathcal{H}^+(E)$) si et seulement si $\forall x \in E,\ \langle x, u(x) \rangle \in \mathbb{R}$ (resp. $\in \mathbb{R}^+$).

**3.** Pour $u \in \text{End}(E)$, établir les égalités :

$$\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^* \circ u) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u) = \text{Im}(u \circ u^*).$$

**4.** Soit $u \in \mathcal{H}^+(E)$ un endomorphisme hermitien positif. Montrer que

$$x \in \text{Ker}(u) \iff \langle x, u(x) \rangle = 0.$$

En déduire que si $u, v \in \mathcal{H}^+(E)$ sont tels que $u - v \in \mathcal{H}^+(E)$, alors

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v) \quad \text{et} \quad \text{Im}(v) \subset \text{Im}(u).$$

**5.** Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \lambda u \circ u^* - v \circ v^* \in \mathcal{H}^+(E)$ ;

(*ii*) $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$ ;

(*iii*) $\exists w \in \text{End}(E),\ v = u \circ w$.

## Exercice 4 [Inégalité de Hadamard]

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{H}_n^+$ une matrice hermitienne positive.

**1.** Établir l'inégalité $0 \leq \det(M) \leq \prod_{i=1}^n m_{i,i}$.

**2.** En écrivant $M = A + iB$, montrer que $A$ est symétrique positive et que $B$ est antisymétrique. Montrer enfin que $\det(M) \leq \det(A)$.

## Exercice 5 [Endomorphismes de la boule unité]

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in L(E)$.

**1.** Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$ (où $\|u\|$ désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne de $E$).

**2.** En déduire que, si $\|u\| \leq 1$, on a $\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Ker}(u^* - \text{Id})$ (on pourra développer $\|u^*(x) - x\|^2$ pour $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ et utiliser la première question). En conclure que $E$ se décompose en une somme orthogonale :

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}).$$

**3.** Toujours sous l'hypothèse $\|u\| \leq 1$, montrer que la suite

$$u_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

## Exercice 6 [Réduction des endomorphismes normaux — cas réel]

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathrm{End}(E)$.

**1.** Montrer que $u$ admet toujours une droite ou un plan stable.

**2.** À partir de maintenant, on suppose $u$ normal ($u \circ u^* = u^* \circ u$). Montrer que si $F \subset E$ est stable par $E$, $F^\perp$ est également stable par $u$.

**3.** En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs de taille $1$ ou $2$ et préciser la forme des blocs $2 \times 2$.

# Pour aller plus loin

## Exercice 7 [Matrices symétriques complexes]

Dans tout cet exercice, on note $S_n(\mathbb{C})$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques complexes (respectivement réelles).

**Questions préliminaires :**

**1.** En considérant la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

montrer qu'une matrice $M$ de $S_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable. Que dire si $M \in S_n(\mathbb{R})$ ?

**2.** Soit $M \in S_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Justifier que $M$ est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(pour un certain entier $1 \leq r \leq n$) et en déduire qu'il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = {}^tPP$. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, peut-on toujours trouver $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ comme ci-dessus ?

**3.** Soient $A$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. En raisonnant par récurrence sur $n \geq 1$, montrer qu'il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale tel que ${}^tOAO$ et ${}^tOBO$ soient diagonales (et réelles).

**Réduction des matrices symétriques complexes :**

Dans le reste de l'exercice, on va montrer le résultat suivant : si $M \in S_n(\mathbb{C})$, alors il existe $U \in \mathrm{U}_n$ une matrice unitaire et $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ des réels positifs tels que

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^t U.$$

**4.** Si $M \in S_n(\mathbb{C})$, on considère $\overline{M}M$. Montrer que $\overline{M}M$ est une matrice hermitienne positive et qu'il existe $V \in \mathrm{U}_n$ telle que ${}^t\overline{VM}MV = D$ avec $D$ une matrice diagonale avec des coefficients réels positifs.

**5.** On pose $N := {}^tVMV$. Vérifier que $N$ est symétrique et calculer $\overline{N}N$. On écrit $N = A+iB$ avec $A$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En exprimant $\overline{N}N$ en fonction de $A$ et $B$, montrer que $A$ et $B$ commutent : $AB = BA$. Vérifier également que $A$ et $B$ sont symétriques.

**6.** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tONO$ est diagonale et conclure.

**7.** Donner une matrice $U$ et des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2$ pour l'exemple de la matrice $M_2$ de la question **1**.

## Exercice 8 [Donné au CC3 en 2024–2025]

Dans cet exercice, $\mathrm{U}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices unitaires et $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

**1.** Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe $T$ une matrice triangulaire supérieure et $U \in \mathrm{U}_n$ telles que $P = UT$ (on pourra penser à $P$ comme la famille de ses colonnes par exemple).

**2.** En déduire que toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists (U, T) \in \mathrm{U}_n \times \mathcal{T}_n(\mathbb{C}),\ M = UTU^*.$$

**3.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ une matrice complexe et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicités).

**3.a.** Calculer $\mathrm{Tr}(A^*A)$.

**3.b.** Montrer que

$$A \text{ est normale} \iff \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 .$$