Corrigé du CC2 ALBI

Exercice 2 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1)(X-2) - 2 + 2(X-1) - (X-2)$$

$$= (X-3)(X-1)(X-2) + X - 2 = (X-2)(X^2-4X+4)$$

$$= (X-2)^3$$

Donc la matrice $N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente. On calcule :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$ donc N est nilpotente d'indice 3 : on sait qu'il n'y a qu'un bloc de Jordan $N \sim J_3$. Pour trouver une base de "Jordanisation", il suffit de trouver un vecteur $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $N^2(e_1) \neq 0$.

On choisit (par exemple) $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$

et $\begin{cases} e_2 = N(e_1) = -v_1 + v_2 \\ e_3 = N^2(e_1) = -2v_2 - 2v_3 \end{cases}$

Dans la base (e_3, e_2, e_1), on a :

$$\mathrm{Mat}_{(e_3,e_2,e_1)} N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_3$$

d'où $\underline{N = P J_3 P^{-1}}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

1. Comme $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E (avec $n = \dim E$), un endomorphisme v est connu dès que l'on connaît $v(u^i(x))$ pour $i = 0..n-1$.

Or, si $v \circ u = u \circ v$, alors $v \circ u^i = u^i \circ v$ d'où $v(u^i(x)) = u^i(v(x))$ $\forall i \geq 0$.

Si on connaît $v(x)$, on connaît donc $v(u^i(x))$ et finalement on connaît v sur une base de E.

Si $v \circ u = u \circ v$ et si u est cyclique, la donnée de $v(x)$ suffit à déterminer v

2. Comme $v(x) \in E = k[u]\cdot x$, on en déduit qu'il existe $P \in k[X]$ tel que
$$v(x) = P(u)(x).$$
Comme $v - P(u)$ commute avec u et que $(v - P(u))(x) = 0$, on en déduit que $\underline{v = P(u)}$ d'après la question 1.

3. Si $u = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a :
$$u \circ v = \begin{pmatrix} 0 & J_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v \circ u.$$
Donc $\underline{v \text{ commute avec } u}$.

Or, si $P \in k[X]$, alors
$$P(u) = \begin{pmatrix} P(J_2) & 0 \\ 0 & P(J_2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi, $\underline{v \text{ n'est pas un polynôme en } u}$.