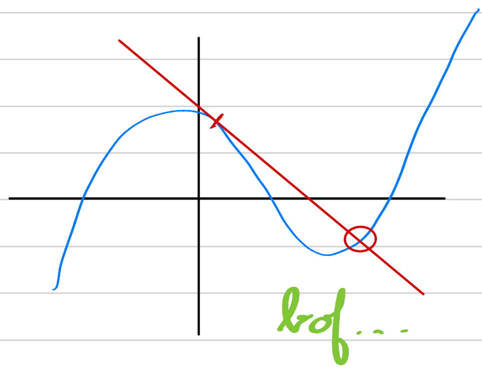
Étude de fonctions

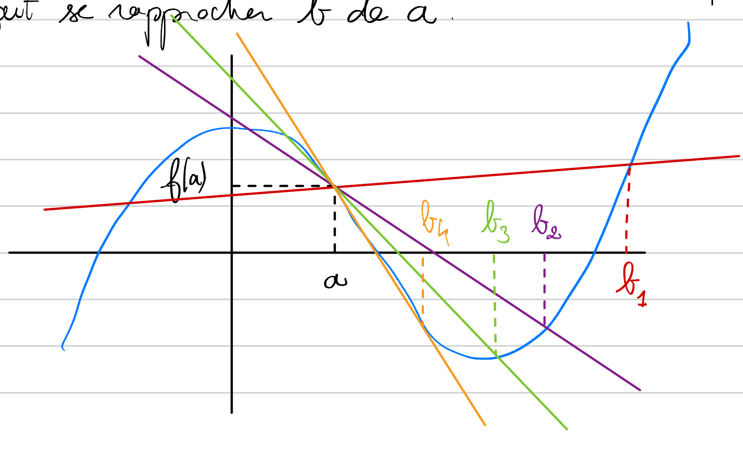
1. Notion de dérivée

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on cherche à connaître l'allure globale du graphe de f. Près d'un point $(a, f(a))$ du graphe (avec $a \in I$), on s'attend à ce que le graphe ressemble à la tangente en ce point. Mais comment définir correctement la tangente ?

<u>Première idée</u> : une droite qui ne touche le graphe qu'en un seul point.



<u>Deuxième essai</u> : on considère la droite qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ avec $b \neq a$ (on parle de <u>sécante</u>) et on fait se rapprocher b de a.



On a l'impression que les droites se "rapprochent" de plus en plus de ce qui devrait être la tangente.

Equation de la sécante entre a et b :

$$\boxed{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}$$

si $x = a$, $y = f(a)$
et si $x = b$,
$y = \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \times \cancel{(b-a)} + f(a) = f(b) - f(a) + f(a) = f(b)$.

On constate que pente de la droite est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ " taux de variations de f entre a et b.

Définition : On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se rapproche d'une valeur quand b se rapproche de a.
Quand c'est le cas, on note $f'(a)$ cette valeur limite et on l'appelle la dérivée de f en a

Exemple : ① $f(x) = 3x+5$. On calcule le taux de variations en $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3b+5-(3a+5)}{b-a} = \frac{3(b-a)}{b-a} = 3$$

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 3$

② $g(x) = x^2$ et $a \in \mathbb{R}$; le taux de variations est donné par

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{a+h-a} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{\cancel{a^2} + 2a\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{a^2}}{\cancel{h}} = 2a+h$$

et quand h se rapproche de 0, $2a+h \approx 2a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, g'(a) = 2a$

Définition : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ pour tout a, on note $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto f'(a) \end{cases}$ C'est la fonction dérivée de f

2. Formules pour les dérivées

Calculer une dérivée peut vite devenir compliqué. Nous utiliserons les formules suivantes :

Constante si f est constante, alors $f' = 0$

Puissances Si $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$ a pour dérivée $f_n'(x) = n x^{n-1}$

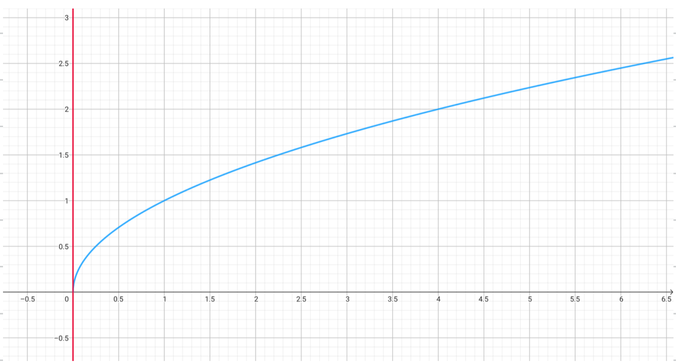
Inverse La fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ a pour dérivée $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Plus généralement, $g_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ a pour dérivée $g_n'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Racine La fonction $h(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

⚠ La fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0 : si $x > 0$, on a
$\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui devient très grand si x est petit

Graphiquement tangente verticale en $x = 0$.



Pour calculer la dérivée de $k(x) = \dfrac{x+2}{3x+1}$, les formules ci-dessus ne suffisent pas !

Proposition : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$
on a : ① $(\lambda f)' = \lambda f'$ ② $(f+g)' = f' + g'$

③ $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ ④ $\left(f/g\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

En particulier $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

Exemple $k(x) = \dfrac{x+2}{3x+1} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = x+2$ et $g(x) = 3x+1$

D'où $f'(x) = 1$ et $g'(x) = 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On applique ④
pour en déduire

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \frac{1 \times (3x+1) - 3 \times (x+2)}{(3x+1)^2} = \frac{-5}{(3x+1)^2}$$

3. Applications

Équation de la tangente

si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ a pour équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad (T_a)}$$

Exemple $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ et la tangente en (a, a^2) a pour équation
$y = 2a(x-a) + a^2$ ou encore $\underline{y = 2ax - a^2 \quad (T_a)}$

Étude des variations

Proposition : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable (avec I intervalle)
alors f est croissante $\iff f' \geqslant 0$.

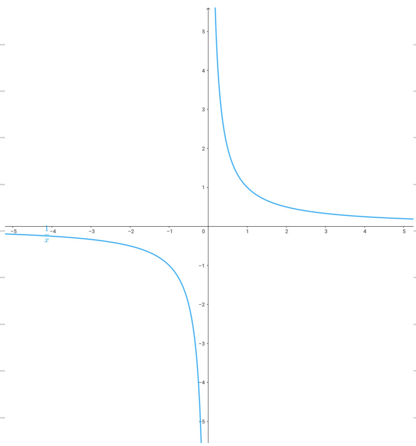
En particulier : $\underline{f \text{ est constante} \iff f' = 0}$

Explication : $f'(a)$ est la pente de la tangente. Or $f \simeq$ tangente donc f croissante $\simeq$ tangente "monte" (de gauche vers droite) $\simeq$ pente $\geqslant 0$.

⚠ Si I = réunion d'intervalles, il faut traiter chaque intervalle séparément.

Exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$



Mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.

Méthode Etudier une fonction

1. Calculer la dérivée f'
2. Faire le tableau de signe de f'
3. Déduire les variations de f
4. Tracer l'allure du graphe et placer quelques points (extremas de f, ...)

Exemple $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x + 3$

1. dérivée $f'(x) = 3x^2 + x - 4 = (3x+4)(x-1)$

2-3.

x	$-\infty$		$-4/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(1) = 1 + \frac{1}{2} - 4 + 3 = \frac{1}{2}$

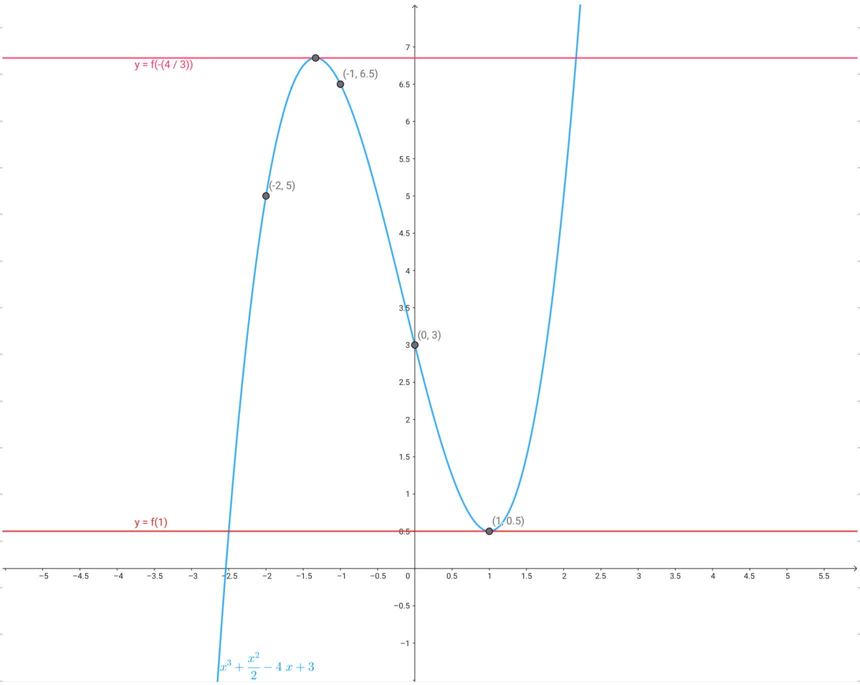
$f(-\frac{4}{3}) = -\frac{64}{27} + \frac{16}{2 \times 9} + \frac{16}{3} + 3$

$= \frac{-64 + 24 + 144 + 81}{27}$

$= \frac{185}{27}$

$\simeq 6,85$

On obtient le tracé suivant :



J'ai placé les points : $(-2, f(-2))$, $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ et les extrema $\left(-\frac{4}{3}, f(-4/3)\right)$ et $(1, f(1))$ avec les tangentes horizontales.