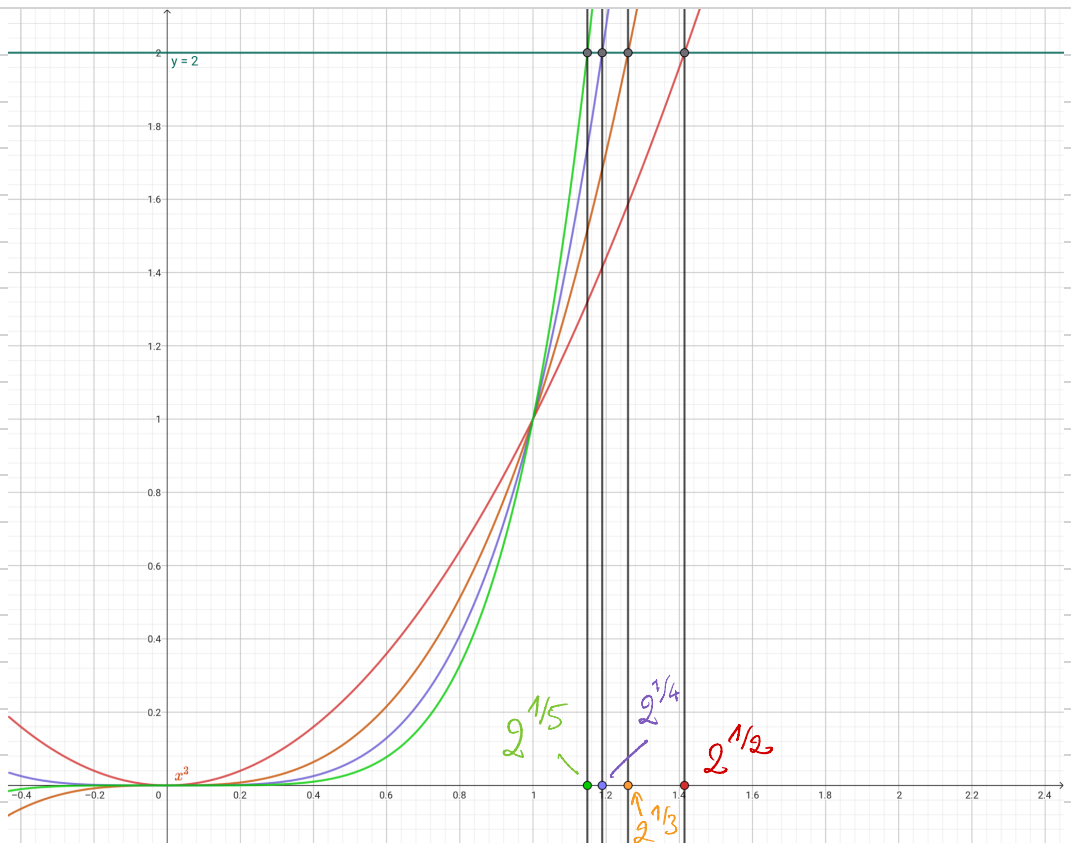


Exponentielle et logarithmes

1. Puissances

On aimerait pouvoir calculer 2^m pour m un entier, une fraction, voire $m \in \mathbb{R}$? On examine déjà le cas des fractions $m = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q \geq 2$.

Comme on doit avoir $2^{p/q} = (2^{1/q})^p$, il suffit de calculer $2^{1/q}$. Ce nombre vérifie

$$(2^{1/q})^q = 2$$


Pour calculer $2^{1/2} = \sqrt{2}$, on procède par approximations décimales : on sait que $1 < \sqrt{2} < 2$, on calcule les carrés de 1,1 / 1,2 ... et dès que l'on dépasse 2, on s'arrête. Puis on fait pareil avec les centièmes, les millièmes ...

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,41	1,42	...	1,414	1,415
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	1,9881	2,0164		1,999396	2,00225

et donc $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

On peut donc calculer 2^m pour différentes valeurs de m :

m	-5	-4,5	0	$1/3$	$1/2$	1	1,5	2	5
2^m	0,031	0,044...	1	1,259...	1,414...	2	2,828...	4	32
10^m	0,00001	0,000032	1	2,154...	3,162...	10	31,62...	100	100 000

De même pour 10^m .

Peut-on calculer 2^π ?

on procède par approximations décimales
 $\pi = 3,141592654 \dots$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 3 < 3,1 < 3,14 < 3,141 < \pi < 3,142 < 3,15 < 3,2 < 4 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
 8 < 8,574 < 8,815 < 8,821 < ? < 8,827 < 8,876 < 9,189 < 16
 \end{array}$$

On gagne en précision à chaque fois que l'on prend une décimale de plus pour approcher $2^\pi \approx 8,824 \dots$

Conclusion : on peut calculer a^x pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On dispose des règles de calcul suivantes :

$$\forall a > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{x+y} = (a^x) \cdot (a^y)$$

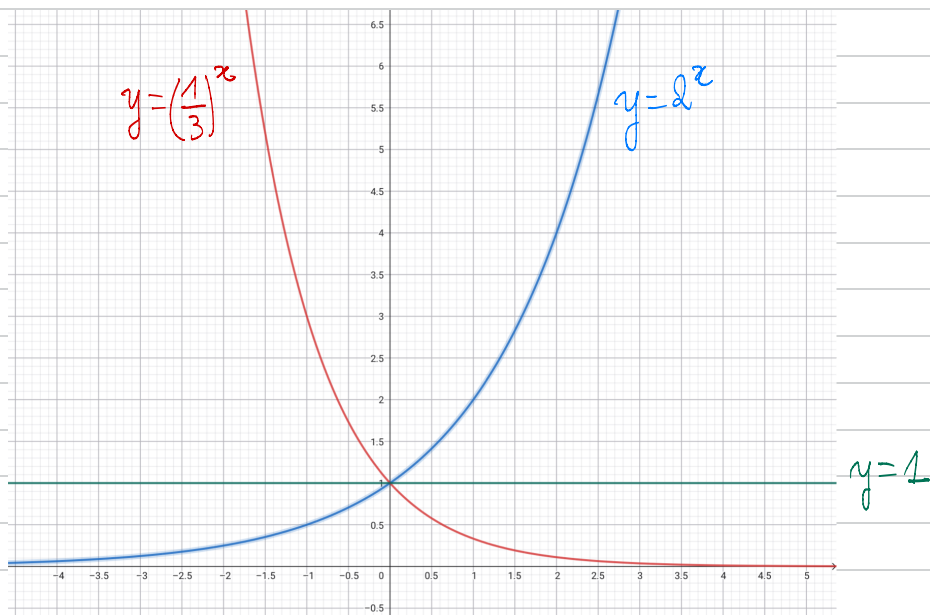
De plus, si $a, b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $(ab)^x = (a^x)(b^x)$

On a également : $a > 0, x, y \in \mathbb{R}$: $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
et $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

Monotonie : ① si $a = 1$, alors $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(la fonction est constante)

② si $a > 1$, la fonction $f_a(x) = a^x$ est croissante

③ si $a < 1$, la fonction " " est décroissante.



On constate sur le dessin que si $a \neq 1$ et $b > 0$, l'équation $a^x = b$ possède une unique solution. Pour déterminer x en fonction de a et b , nous introduisons une nouvelle fonction.

2. Le logarithme népérien

Déf: Il existe une unique fonction $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(1) = 0$. Cette fonction est appelée logarithme népérien et elle est notée ln.

Rq: comme $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, on en déduit que la fonction ln est strictement croissante.

Prop: la fonction ln vérifie :

① $\forall x, y > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

② $\forall x > 0, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

③ $\forall x, y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

④ $\forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Quelques valeurs (approchées) :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	3	5	10
$\ln(x)$	-2,303...	-1,609...	-0,693...	0	0,693...	1,098...	1,609...	2,303...

Rq: Historiquement, la fonction ln a été utilisée à travers des tables de logarithmes (cf page suivante) : on s'en servait pour calculer des produits de nombres avec une grande précision.

Num. 860 — 864. Log. 934 — 937.

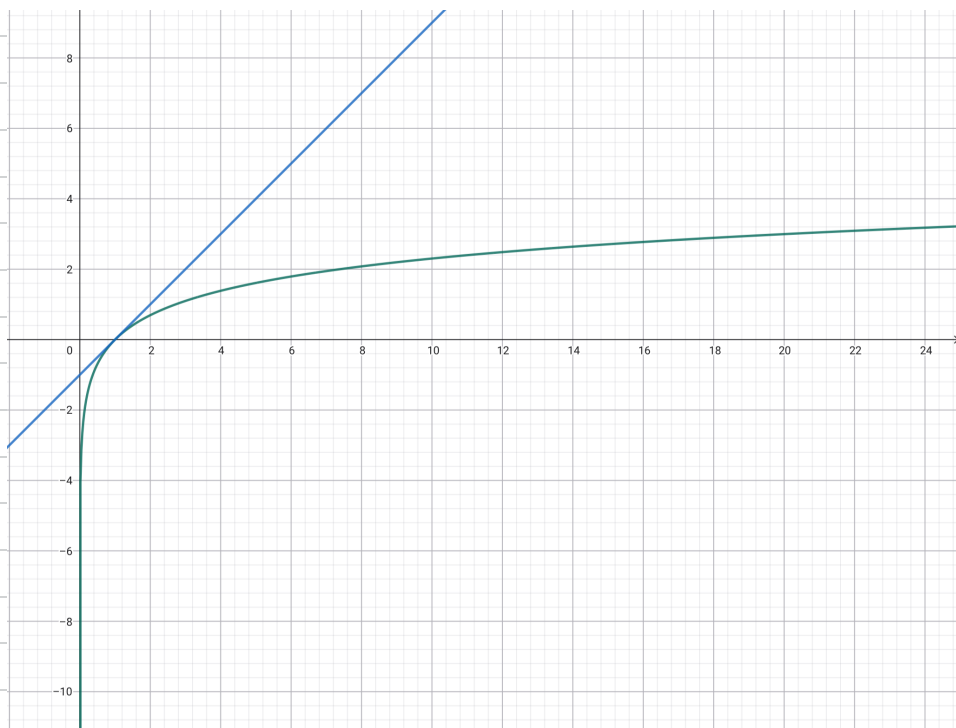
0°	2°	Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
14'	23'												51
20"	20"	8600	934 4985	5035	5086	5136	5187	5237	5287	5338	5388	5439	1 5.1
	21	8601	5489	5540	5590	5641	5691	5742	5792	5843	5893	5944	2 10.2
	22	8602	5994	6045	6095	6146	6196	6247	6297	6348	6398	6449	3 15.3
	23	8603	6499	6550	6600	6651	6701	6752	6802	6853	6903	6954	4 20.4
	24	8604	7004	7054	7105	7155	7206	7256	7307	7357	7408	7458	5 25.5
	25	8605	7509	7559	7610	7660	7711	7761	7812	7862	7912	7963	6 30.6
	26	8606	8013	8064	8114	8165	8215	8266	8316	8367	8417	8468	7 35.7
	27	8607	8518	8568	8619	8669	8720	8770	8821	8871	8922	8972	8 40.8
	28	8608	9023	9073	9123	9174	9224	9275	9325	9376	9426	9477	9 45.9
	29	8609	9527	9578	9628	9678	9729	9779	9830	9880	9931	9981	
21"	30"	8610	935 0032	0082	0132	0183	0233	0284	0334	0385	0435	0485	
	31	8611	0536	0586	0637	0687	0738	0788	0838	0889	0939	0990	
	32	8612	1040	1091	1141	1191	1242	1292	1343	1393	1444	1494	
	33	8613	1544	1595	1645	1696	1746	1797	1847	1897	1948	1998	
	34	8614	2049	2099	2150	2200	2250	2301	2351	2402	2452	2502	
	35	8615	2553	2603	2654	2704	2754	2805	2855	2906	2956	3006	
	36	8616	3057	3107	3158	3208	3259	3309	3359	3410	3460	3511	
	37	8617	3561	3611	3662	3712	3763	3813	3863	3914	3964	4015	
	38	8618	4065	4115	4166	4216	4266	4317	4367	4418	4468	4518	
	39	8619	4569	4619	4670	4720	4770	4821	4871	4922	4972	5022	
22"	40"	8620	5073	5123	5173	5224	5274	5325	5375	5425	5476	5526	
	41	8621	5576	5627	5677	5728	5778	5828	5879	5929	5979	6030	
	42	8622	6080	6131	6181	6231	6282	6332	6382	6433	6483	6533	
	43	8623	6584	6634	6685	6735	6785	6836	6886	6936	6987	7037	
	44	8624	7087	7138	7188	7239	7289	7339	7390	7440	7490	7541	
	45	8625	7591	7641	7692	7742	7792	7843	7893	7943	7994	8044	
	46	8626	8095	8145	8195	8246	8296	8346	8397	8447	8497	8548	
	47	8627	8598	8648	8699	8749	8799	8850	8900	8950	9001	9051	
	48	8628	9101	9152	9202	9252	9303	9353	9403	9454	9504	9554	
	49	8629	9605	9655	9705	9756	9806	9856	9907	9957	*0007	*0058	
23"	50"	8630	936 0108	0158	0209	0259	0309	0360	0410	0460	0511	0561	
	51	8631	0611	0661	0712	0762	0812	0863	0913	0963	1014	1064	
	52	8632	1114	1165	1215	1265	1316	1366	1416	1466	1517	1567	
	53	8633	1617	1668	1718	1768	1819	1869	1919	1970	2020	2070	
	54	8634	2120	2171	2221	2271	2322	2372	2422	2473	2523	2573	
	55	8635	2623	2674	2724	2774	2825	2875	2925	2975	3026	3076	
	56	8636	3126	3177	3227	3277	3327	3378	3428	3478	3529	3579	
	57	8637	3629	3679	3730	3780	3830	3881	3931	3981	4031	4082	
	58	8638	4132	4182	4233	4283	4333	4383	4434	4484	4534	4584	
	59	8639	4635	4685	4735	4786	4836	4886	4936	4987	5037	5087	
24"	24"	8640	5137	5188	5238	5288	5338	5389	5439	5489	5540	5590	
	1"	8641	5640	5690	5741	5791	5841	5891	5942	5992	6042	6092	
	2	8642	6143	6193	6243	6293	6344	6394	6444	6494	6545	6595	
	3	8643	6645	6695	6746	6796	6846	6896	6947	6997	7047	7097	
	4	8644	7148	7198	7248	7298	7349	7399	7449	7499	7550	7600	
	5	8645	7650	7700	7750	7801	7851	7901	7951	8002	8052	8102	
	6	8646	8152	8203	8253	8303	8353	8403	8454	8504	8554	8604	
	7	8647	8655	8705	8755	8805	8855	8906	8956	9006	9056	9107	
	8	8648	9157	9207	9257	9307	9358	9408	9458	9508	9559	9609	
	9	8649	9659	9709	9759	9810	9860	9910	9960	*0010	*0061	*0111	
k. 2	k. 3	Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
° ' "		S. 4,685	D	T. 4,685	D	Log. Sin.	Log. Tang.						
0. 14. 20		5736 1	—	5773 8	+	7,620 0721	7,620 0758						
14. 30		5735 8	3	5774 4	6	7,625 0928	7,625 0967						
2. 23. 20		4490 3		8266 3		8,619 9475	8,620 3251						
23. 30		4487 4	29	8272 1	58	8,620 4519	8,620 8304						
23. 40		4484 4	30	8278 0	59	8,620 9557	8,621 3351						
23. 50		4481 5	29	8283 9	59	8,621 4589	8,621 8392						
24. 0		4478 6	29	8289 7	58	8,621 9616	8,622 3427						
Δ α'' = 0,003				0,006									

$$e = 2,718\,2818$$

$$\text{Log. } e = M = 0,434\,2945$$

$$\text{Log. } M = 1,637\,7843.$$

Voici le graphique de la fonction $\ln$ avec sa tangente en $(1, 0)$ d'équation $y = x - 1$.



On "constate" que la fonction prend toutes les valeurs:
 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = \ln(x)$.

Déf: En particulier, il existe un unique nombre réel noté e tq $\ln(e) = 1$. On a $e \simeq 2,7182818...$

Résolution d'équations: on a vu précédemment que si $a > 0$ et $a \neq 1$, $b > 0$ alors l'équation $a^x = b$ possède une unique solution. En prenant le logarithme de l'égalité, on obtient : $\ln(a^x) = \ln(b)$ et comme $\ln(a^x) = x \ln(a)$ on a finalement $x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Def: Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, on note $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ pour $b > 0$.

La fonction $\log_a$ s'appelle le logarithme en base a .

Rq: * si $a = e$, $\log_e(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(e)} = \ln(b)$ car $\ln(e) = 1$

Donc $\log_e = \ln$.

* les fonctions $\log_a$ vérifient les mêmes propriétés que $\ln$
par exemple: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ etc.

* Par définition, on a:
$$\begin{cases} a^{\log_a(x)} = x & \text{pour } x > 0 \\ \log_a(a^x) = x & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En particulier, $\log_{10}(10^x) = x$ et donc $\log_{10}(n)$ est approximativement le nombre de chiffres dans l'écriture de l'entier n .

3. La fonction exponentielle.

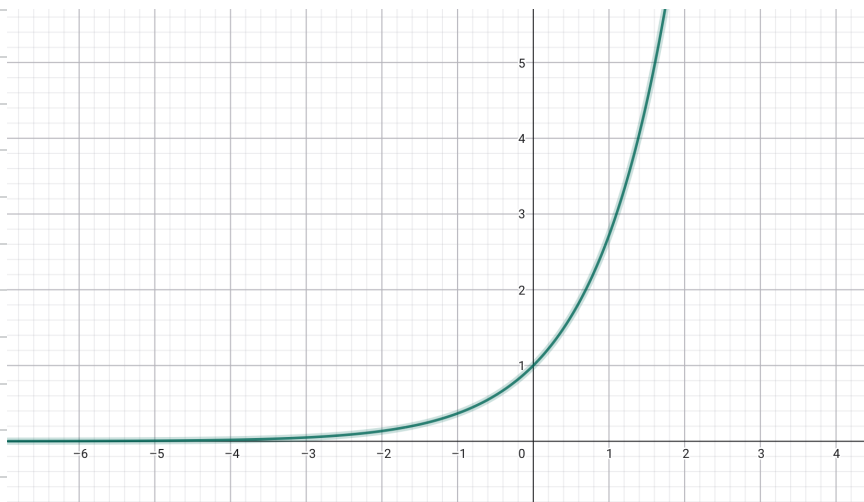
Def: La fonction $\exp$ (exponentielle) est définie sur $\mathbb{R}$ par
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

Elle vérifie:
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \\ \forall x > 0, e^{\ln(x)} = x \end{cases}$$

De plus, $e^0 = 1$,
$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \cdot e^y & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} & \text{et } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \end{aligned}$$

Rq: on vérifie que si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln(a)}$
 et donc la fonction exp (et ln!) permet de retrouver toutes les fonctions puissances

Graphique de la fonction exp.



Calculs de dérivées: ① $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = e^x$
 La fonction exponentielle est sa propre dérivée.

② (Rappel) $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$

③ Si $f(x) = e^{u(x)}$ (avec u une fonction) alors $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

④ Si $g(x) = \ln(v(x))$ (avec v fonction) alors $g'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$

Exemples:

• Si $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors $\forall x > 0, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
 (on écrit $f(x) = e^{\alpha \ln(x)} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \alpha \ln(x)$)

• Si $f(x) = a^x$ ($a > 0$) alors $f(x) = e^{x \ln(a)} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln(a)$
 et donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = \ln(a) a^x$