Arithmétique

Séance 3 – Géométrie

1 Rituel

Énoncé :
Dans un triangle ABC, I est milieu du segment $[AB]$, J au deux-tiers du segment $[AC]$, en partant de A.
Préciser l'intersection de la droite (IJ) avec la droite (BC) ; position de l'intersection par rapport aux points B et C ; par rapport aux points I et J.

- Résoudre cet exercice de deux façons (outils) différentes ;
- Préciser dans les deux cas la méthode et les savoirs visés ;
- Avez-vous pensé à l'outil « Barycentres » ?

2 Travail en séance

Exercice 1 [Système à l'équilibre]

On se place dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$

1. On explore le plan via trois points non alignés A, B et C ; affinement indépendants.

- En fonction d'un point M quelconque du plan, discuter le signe des coordonnées barycentriques dans (A, B, C) suivant les parties de demi-plans dans lesquels M se trouve.
- Pourquoi $M \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, M est barycentre des points A, B et C, si, et seulement si, M, A, B et C forment un système de points pondérés à l'équilibre (c'est-à-dire de *masse nulle*).

2. On désigne par *système de points à l'équilibre*, un système de points pondérés de masse nulle.

- Expliquer pourquoi un système à l'équilibre est stable *par combinaisons linéaires.*
- Caractériser géométriquement un système à l'équilibre de trois points distincts A, B et C.
- Justifier que quatre points *non alignés* forment un système à l'équilibre, avec des coefficients non nuls, uniques à un facteur multiplicatif près.
- Soit $ABCD$ un quadrilatère strict, trois quelconques des quatre points n'étant pas alignés. On note α, β, γ et δ les poids respectifs des quatre points A, B, C et D. En étudiant les deux cas « $\alpha + \beta \neq 0$ » puis « $\alpha + \beta = 0$ », en déduire, dans chaque cas, un positionnement des droites (AB) et (CD).

— Caractériser les systèmes à l'équilibre suivants ; quelle configuration pour les points A, B, C et D, en sachant qu'ils vérifient le système

(S_1) : avec, $S_1 = \{(A, -1); (B, 1); (C - 1); (D, 1)\}$

(S_2) : avec, $S_2 = \{(A, -3); (B, 2); (C - 2); (D, 3)\}$

3. Trois applications directes ; résoudre les deux énoncés ci-dessous en utilisant des combinaisons linéaires de systèmes à l'équilibre.

— ABC est un triangle. On construit les points, I symétrique du milieu de $[AB]$ par rapport à B, J milieu du segment $[AC]$ et K intersection de $[BC]$ avec $[IJ]$.
Déterminer la position du point K sur les deux segments $[BC]$ et $[IJ]$.

— $ABCD$ est un parallélogramme, I le symétrique du milieu du segment $[AB]$ par rapport au point A et J le point du segment $[AD]$ situé au deux-tiers du segment en partant du point A.
Démontrer l'alignement des points I, J et C. ;

— Reprendre l'énoncé du rituel et le résoudre avec cette nouvelle méthode et ce nouvel outil.

Exercice 2 [Barycentres et coordonnées]

On se place dans notre espace euclidien usuel $\mathcal{E}$

1. On dit que, *Un espace affine est l'ensemble des barycentres des points de l'un de ses repères affines ; coordonnées et coordonnées barycentriques.*

— Vérifier cette proposition dans le cas où l'espace affine considéré est de dimension 2 ou 3.

— Démontrer ce résultat.

— Qu'appelle-t-on les *coordonnées barycentriques d'un point* ?

2. Étant donné un repère barycentrique (A, B, C), les points $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, et $R = (r_1, r_2, r_3)$, sont alignés si, et seulement si, $\det(P, Q, R) = 0$.

3. Retrouver la démonstration de la partie directe du théorème de Ménélaüs.

3 Travail à faire

Préparer à l'oral la présentation de la résolution de l'exercice suivant :
On désigne de façon habituelle par a, b et c les longueurs BC, AC et AB d'un triangle ABC. On considère alors les points U, B_0 et C_0 ainsi :

— U est barycentre du système $(B, b); (C, c)$;

— B_0 et C_0 sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} \quad \text{et,} \quad \overrightarrow{AC_0} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Déterminer la nature du quadrilatère AB_0UC_0 ; en déduire le rôle de la droite (AU) dans le triangle ABC.
Quel résultat remarquable du triangle peut-on alors en déduire, par l'outil « Barycentres » ?