Arithmétique

Séance 5 – Géométrie

1 Rituel

Énoncé :
Les extrémités A, B de l'hypoténuse d'une équerre $(30° - 60°)$ glissent le long deux demi-droites orthogonales $[Ox)$ et $[Oy)$ (sol-mur).
Quel est le lieu du sommet de son angle droit (on pourra poser $l = AB$) ?

2 Travail en séance

Exercice 1 [Droites remarquables du triangle]

On se place dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ et on considère un triangle (non aplati) ABC

1. Médiatrices d'un triangle.

- Donner une définition de la médiatrice d'un segment $[AB]$ ainsi qu'une propriété caractéristique ; au fait, laquelle des deux est « vraiment » la définition ? Justifier !
- Quel est le lieu des centres des cercles passant par deux points distincts A et B ? Justifier.
- Trois points non alignés A, B et C définissent un unique cercle passant par ces trois points ; vrai ou faux ? Justifier.

2. Hauteurs d'un triangle.

- A partir d'un triangle ABC, on construit les parallèles à chacun des côtés et passant le sommet opposé ; on obtient un (nouveau) triangle $A'B'C'$. Qui sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$ pour le triangle ABC ? Justifier (avec soin).
- *Application* : On considère un cercle de diamètre $[AB]$ et deux points distincts M et N du même demi-cercle. Les droites (AM) et (BN) se croisent en P ; les droites (AN) et (BM) se croisent en Q.
  La droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (AB). Pourquoi ?

3. Centre de gravité d'un triangle.

- Chercher un cheminement (une procédure) permettant de démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes en n'utilisant que les connaissances de géométrie d'un élève de collège-seconde.

— Construire un triangle avec les trois points de concours des médiatrices, hauteurs et médianes. Conjecturer une propriété sur le positionnement relatif de ces trois points.

— Soit ABC un triangle et O son centre de son cercle circonscrit. On définit le point H par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

  — Démontrer que H n'est autre que l'orthocentre du triangle ABC.

  — Cette relation vectorielle permet de déterminer le positionnement relatif des points O, G et H ; comment ?

  — *Application* : On considère un parallélogramme $ABCD$, I le milieu du segment $[AB]$, E le points situé au $2/3$ du segment $[DI]$ depuis le point D, et enfin, O le centre du parallélogramme. Justifier l'alignement des quatre points A, E, O et C.

3 Travail à faire

On reprend la configuration de la droite d'Euler. Considérer l'isobarycentre ω des points A, B, C et H. Préciser sa position.
Expliquer pourquoi on parle alors d'un cercle remarquable (dit, « cercle des neufs points ») passant par neuf points remarquable du triangle dont, les pieds des hauteurs.
On préparera une présentation avec Geogebra à l'appui, notamment pour utiliser la propriété de « géométrie dynamique » du logiciel.