Université de Rennes

Arithmétique

Séance 7 – Géométrie

1 Rituel

Énoncé :
Présentation de la construction de S. Marolois

2 Travail en séance

Exercice 1 [Construction à la règle et au compas]

On se place dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$.

1. Construire à la règle et au compas,

- Un triangle équilatéral ; un hexagone régulier.
- Un carré ; un octogone régulier.

2. Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. Le dodécagone régulier est-il constructible ?

Exercice 2 [Le cas du pentagone]

On se place dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$.

1. On pose :

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

On munit le plan du repère OND $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

- Montrer que $\omega + \overline{\omega}$ est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
- En déduire une équation polynomiale de degré 2 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont solutions.
- On considère dans $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$4x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$$

  Déterminer les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{C}$.
- Tracer cet ensemble ainsi que ses intersections avec les axes du repère.
- En déduire la construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 3 [Racines n−ièmes de l'unité]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = a$ où a est un complexe donné et n un entier supérieur ou égal à 2.

2. Quel rôle joue $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; que peut-on dire de la somme des racines de cette équation et pourquoi cela se « voit » géométriquement ?
Que peut-on dire (algébriquement) de l'ensemble des solutions des racines n−ièmes de l'unité, muni de la multiplication dans $\mathbb{C}$?

3 Travail à faire

On ne peut pas construire à la règle et au compas l'heptagone régulier. A vous de comprendre au mieux pourquoi ; en préparer une présentation.