

Objectif: donner un sens et expliquer des éléments de démonstration de l'énoncé suivant (Brauer, 2021)

(Si  $(X, x)$  est une singularité Kawamata-log-terminale (klt)  
alors  $\pi_1^{loc}(X, x)$  est un groupe fini.

Un espace complexe (resp. variété algébrique) est localement de la forme  $X \subseteq \underbrace{\Omega}_{\text{boule par ex.}} \subset \mathbb{C}^N$   $(f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{O}_\Omega$

$$\text{et } X = \{z \in \Omega \mid f_1(z) = \dots = f_q(z) = 0\}.$$

On se limitera au cas où  $X_{reg} = \{x \in X \mid \exists n \geq 1, (X, x) \text{ est local } \simeq \mathbb{C}^n\}$   
est connexe et vérifie:  $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\text{restrict}} \mathcal{O}(X_{reg})$  est bijective  
(on dit normal)

En part.  $X_{reg}$  a une dimension fixée  $n$  (c'est la dim de  $X$ ).

Fait:  $X_{sing} = X \setminus X_{reg}$  est encore un espace complexe et  
vérifie  $\dim(X_{sing}) < \dim(X)$ .  
De plus, si  $X$  est normal,  $\dim(X_{sing}) \leq \dim(X) - 2$ .

Exemple historique des surfaces: si  $\dim(X) = 2$  et  $X$  normale  
alors  $X_{sing}$  est un ensemble discret de points!

Si  $x \in X$ , on fixe un plongement  $(X, x) \subseteq (\mathbb{C}^N, 0)$   
et on considère  $X_\varepsilon = \mathbb{B}(0, \varepsilon) \cap X \subset \mathbb{C}^N$

$\Rightarrow$  c'est une variété réelle orientée de dim 3 et  $X_\varepsilon$  est compacte

De plus, si  $\exists \varepsilon_0, \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow X_\delta \xrightarrow{\text{diffé}} X_\varepsilon$

En particulier  $\pi_1^{loc}(X, x) := \pi_1(X_\varepsilon)$  est bien défini pour  $\varepsilon \ll 1$

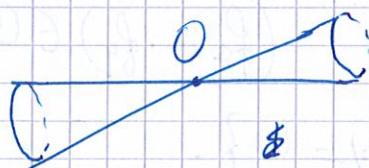
Mumford initie cette étude  $\Rightarrow$  IHES, 1961.  
 En particulier, il établit:

Th (Mumford):  $\pi_1^{\text{loc}}(X, x) = (1) \iff (X, x) \text{ est lisse } \simeq \mathbb{C}^2$

Travaux repris par Milnor, Brieskorn et bien d'autres...

Donnons deux exemples ①  $X = (x^2 + y^2 + z^2 = 0) \subset \mathbb{C}^3$

$$(xy = z^2)$$



$X \simeq \mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}(\pm 1)$  avec l'act° diagonale.  
 Les monômes invariants sont  $u^2, v^2$  et  $uv$   
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel$   
 $x \quad y \quad z$

et on a bien  $xy = z^2$ !

L'application  $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (u, v) \longmapsto (u^2, v^2, uv) \end{cases}$  passe au quotient  
 en  $\mathbb{C}^2 / \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^3$  et a pour image  $X$ .  
 D'où  $\pi_1^{\text{loc}}(X, o) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

② Quantique de Klein:  $(u^3v + v^3w + w^3u = 0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$   
 est une quantique plane lisse de genre 3  
 et vérifie  $\text{Aut}(\mathcal{C}) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7) = G_7$  (ordre 168)  
 $= 84(g-1)$ .

On considère  $\Omega \mathcal{C} = \text{cône affine sur } \mathcal{C}$  (équation vue ds  $\mathbb{C}^3$ )  
 $\Rightarrow 0$  pt sing.

$G_7$  agit sur  $\Omega \mathcal{C}$  (en identifiant  $\Omega \mathcal{C}$  à l'espace des 1-formes par ex)

[Klein, 1970?]:  $\Omega \mathcal{C} / G_7 \simeq X = (x^2 + y^3 + z^7 = 0) \subset \mathbb{C}^3$

Klein introduit  $\nabla := \frac{1}{54} \text{Hess}(f) = \frac{1}{54} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \end{vmatrix}$  degré 6.

$$C = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \text{Hess}(f) & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & 0 \end{vmatrix}$$

degré: 14

$$\text{et } K = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}$$

deg = 21

et il montre:  $1728 \nabla^7 + C^3 - K^3 \in (f)$

$\Rightarrow$  en restreint à  $(f=0)$ , on a bien l'équation suivante.

Conclusion:  $\pi_1^{\text{loc}}(X, 0)$  est très gros!

Cas des singularités isolées: on considère maintenant  $(X, x)$  "germe" de dimension  $n$  avec  $X_{\text{sing}} = \{x\}$ .  
Pour étudier plus précis<sup>+</sup> la top. locale, on introduit:

$\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$  l'résumé:  $\tilde{X}$  lisse,  $E = \pi^{-1}(x) = \text{Exd}(x)$   
est un diviseur à croisement normaux simples et  $\tilde{X} \cdot E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{x\}$   
 $\Delta$  pas unique! [déjà utilisé par Mumford].

$$\pi_1(\tilde{X} \setminus E) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(\Delta(E))$$

$\uparrow$   
 $\pi_1(X \setminus \{x\})$   
 on relève une rétract<sup>o</sup> de  $X \rightarrow \{x\}$ .

(si  $X = X_E$ )  $\pi_1(X \setminus \{x\})$

avec  $\Delta(E)$  = complexe dual de  $E$  déf par

- Sommets de  $E$  = composantes irréductibles  $(E_i)_{i \in I}$  de  $E$ .
- cellules de dim 1 = comp. connexes des  $E_i \cap E_j$  ( $i \neq j$ ).
- cellules de dim  $k$  = " " "  $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}$   
avec les  $i_\ell$  2 à 2 dist.

$\bigcap_{j \in J} E_j$  avec  $|J|=k$   
 $J \subset I$ .

Exemple en dim 2.

Rq: (i)  $\text{Ker}(\pi_1(\tilde{X}, E) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}))$  est <sup>normal</sup> engendré par des lacets <sub>autant des comp. de E</sub> <sub>mériidiens</sub>.

(ii)  $\text{Ker}(\pi_2(E) \rightarrow \pi_2(\Delta(E)))$  est <sup>normal</sup> engendré par les images  $\pi_2(E_i) \rightarrow \pi_2(E)$ .

(iii)  $\Delta(E)$  n'est pas bien défini car change suivant le modèle  $\tilde{X}$  mais [Stapanov / Thuillier 2007]: le type d'homotopie de  $\Delta(E)$  ne dépend pas de  $(\pi: \tilde{X} \rightarrow X)$ .

Conclusion:  $\pi_1(\Delta(E))$  est bien déf!!

Un résultat spectaculaire de Kollar-Kapovich <sup>montre</sup> que tant peu arriver:

Th (KK, 2013): Soit  $G$  un gpc de présentation  $\leftarrow^{+ \infty}$ . Alors

$\exists (X, \alpha)$  sing isolée avec  $\dim X = 3$  tq

$$\pi_1^{loc}(X, \alpha) \simeq \pi_1(\Delta(E_\alpha)) \simeq G.$$

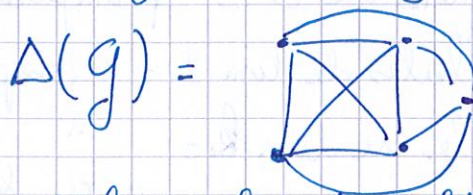
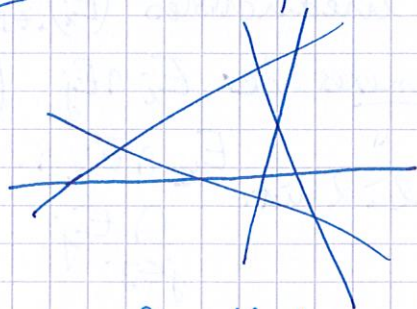
Méthode simplissime de Kollar (Alg. Geom. 2014):

Etape 1: réaliser  $\Delta(E)$

Soit  $\mathcal{G}$  un complexe simplicial de dim 2 avec  $\pi_1(\mathcal{G}) \simeq G$ .

Soit  $N := |\mathcal{G}^{(0)}|$  le nb de sommets de  $\mathcal{G}$ . Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , on considère  $N$  plans en position générale  $E_3 \# \mathcal{G} = \Delta(E_3)$ .

ex  $N=5$ .



simplexe plein / complet

On élimine les cellules en trop:  $\mathcal{G}^{(2)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  et on éclate les points ~~sur~~ de  $\mathbb{P}^3$  qui correspondent à  $\mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(2)}$

On a  $\mu_2: X_2 \xrightarrow{X_3} \mathbb{P}^3$  et on considère  $E_2 = \text{transf}$   
 stricte de  $E_3 = \mu_2^{-1}(E_3) - \text{Exc}(\mu_2)$ .  
 $\rightarrow \begin{cases} \Delta^\bullet(E_2)^{(0)} = \Delta(E_3)^{(0)} = \mathcal{O}^{(0)} & \text{et } \Delta(E_2)^{(1)} = \Delta(E_3)^{(1)} = \mathcal{O}^{(1)} \\ \Delta(E_2)^{(2)} = \Delta(E_3)^{(2)} - (g^{(2)}, \mathcal{O}^{(2)}) = \mathcal{O}^{(2)} \end{cases}$  !

On considère alors:  $\mu_1: X_1 \longrightarrow X_2$  l'éclat<sup>+</sup> des  
 strates de  $E_2$  qui ne correspondent pas à des él<sup>ts</sup> de  $\mathcal{O}^{(1)}$   
 et on a finalement:

$\Delta(E_1) \simeq \mathcal{O}$  avec  $E_1 = \text{transf}$  stricte de  $E_2$  par  $\mu_1$ .

Conclusion:  $\exists X_1$  variété de dim 3 et  $\mathbb{A}^1 \subset X_1$  div à  
 { croisements normaux simples tq  $\Delta(\mathbb{A}^1) \simeq \mathcal{O}$ . De plus,  
 { les composantes de  $\mathbb{A}^1$  sont des surfaces rationnelles (biel à  $\mathbb{P}^2$ )  
 { donc  $\pi_1(\mathbb{A}^1) \simeq \pi_1(\Delta(\mathbb{A}^1)) \simeq \pi_1(\mathcal{O}) \simeq G$ .

→ Etape 2: "contracter  $\mathbb{A}^1$ "

Lemme 1 Soit  $H$  un diviseur de  $X_1$  qui rencontre les comp.  
 de  $\mathbb{A}^1$  transversel<sup>+</sup>. Alors  $\mu: Y \longrightarrow X_1$  def  $\mu = \text{Bl}_{H \cap \mathbb{A}^1}$   
 et  $D = \text{transf}$  stricte de  $\mathbb{A}^1$  on a:

(i)  $D \sim \mu^* \mathbb{A}^1 - E$  et (donc cartier) et  $D \simeq W$ .

(ii)  $Y \setminus D$  est lisse et le long de  $D$  on a:

$$(D \subset Y) \underset{\text{loc}}{\simeq} (xy = \mathbb{A}^1 = 0) \subset (xy = z\mathbb{A}^1) \subset \mathbb{C}^4$$

(iii)  $N_{D/Y} = \mathcal{O}_Y(D)|_D \simeq \mathcal{O}_X(\mathbb{A}^1 + H)|_W$ .

défin: local<sup>+</sup>, on a  $X = \mathbb{C}_{xy,z}^3$  et  $\begin{cases} W = (xy=0) \\ H = (z=0) \end{cases}$



$$\text{à } t=0, (x, y, z, [s:t]) = (x, y, z, [1:0]) \text{ avec } xy=0.$$

$$\text{D'où } Y = \text{Bl}_{W \cup H}(X) = \left( (xy s = zt) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1 \right) \text{ avec } (s:t) \in \mathbb{P}^1$$

et  $(xy=0) \Rightarrow$  devient  $(t=0)$  dans  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow$  encore Cartier  
 $\pi^* W \simeq D + E$ .

$$\text{Or } \pi^* \mathcal{O}_W = (xy s = 0) = (zt = 0) = \underbrace{(z=0)}_E \cup \underbrace{(t=0)}_D$$

De plus, si  $t \neq 0$ , on a :  $xy(\frac{s}{t}) = z \Rightarrow$  lisse  
 (se sur  $Y \setminus D$ ).

$$\text{et sinon on a bien } xy = z(t/s) = zu \subset \mathbb{C}^4.$$

Enfin: on a vu  $\pi^* W \simeq E + D$  et de m  $\pi^* H = (z=0) = (xy=0) \cup (s=0)$ .

$$\text{Mais } (s=0) \sim (t=0) \rightarrow D \quad \pi^* H \simeq \underbrace{\pi_*^{-1} H}_{\text{transf stricte}} + E$$

$$\text{Donc } D \sim \pi^* W - \pi^* H + \pi_*^{-1} H$$

mais maintenant  $D \cap \pi_*^{-1} H = \emptyset$  ! en restreignant  
 à  $D \simeq W$ , on a bien  $\mathcal{O}_Y(D)|_D \simeq \mathcal{O}_X(W-H)|_W$   $\square$

Conclusion: si  $H$  est choisie très ample, on a donc

$$\bullet N_D|_Y < 0 \text{ et } D \simeq W \text{ donc en particulier } \pi_1(D) \simeq \pi_1(W) \simeq \pi_1(\mathcal{O}) = G.$$

D'après un résultat de Grauert (1962), on peut contracter  
 $D$  sur un point :  $\exists f: \begin{pmatrix} Y & \longrightarrow & X \\ D & \longrightarrow & x \end{pmatrix}$  normal  
 et  $f: Y \setminus D \rightarrow X \setminus \{x\}$  iso.

→ Etape 3: "résoudre  $(X, x)$ " :

Lemme 2: La paire  $(Y, D)$  construite <sup>ci-dessus</sup> admet une résolution

$$\rho: (\tilde{X}, \tilde{D}) \rightarrow (Y, D) \text{ tq } \tilde{X} \text{ lisse et } \mathcal{O}(\tilde{D}) = \mathcal{O}(D)$$

et  $\tilde{X} \setminus \tilde{D} \xrightarrow[\sim]{} Y \setminus D$ .

démo: on éclate les composantes de  $D$ . Ce sont des diviseurs de  $Y$  mais comme  $Y$  n'est pas lisse, ils ne sont pas Cartier. En ces points, on a un modèle  $(xy = zu) \subset \mathbb{C}^4$  et  $D = (u=0)$  mais une composante  $D_0$  est donnée par  $(x=u=0) \Rightarrow 2$  équations.

$$(x=u=0) \subset (u=0) \subset (xy=zu)$$

$D_0 \quad D \quad Y$

~~Dans la "carte"  $\frac{x}{u} = x'$ , on a  $D'_0 \subset Y' \Leftrightarrow (u=0) \subset (x'y=z) \subset (\frac{x}{u}=y)$  SNC.~~

~~$\uparrow$  1 composante  $\quad \uparrow$  lisse~~

~~Dans l'autre:  $\subset (y=zu) \subset \mathbb{C}^4$ .~~

~~On a donc  $xu = ut$  dans cet éclatement:~~

~~si  $x = u(t/s) = uw$  alors on a~~

Dans la "carte"  $x' = \frac{x}{u}$ , on a:

$$(D^*, \tilde{X}) = (\underbrace{x=0}_{1 \text{ composante}}) \subset (\underbrace{y=z}_{\text{lisse}})$$

Dans l'autre carte:  $u' = \frac{u}{x}$ , on a les nouvelles équations:

$$(x=0, u'=0) \subset (u'=0) \subset (xy = zu')$$

ie  $(x=0) \subset (u'=0) \subset (y=zu')$

$D_0 \quad (x=0) \cup (y'=0) \subset (y=zu')$

$D = \text{SNC} \quad \text{lisse}$

on constate que l'on a pas changé les relations d'incidence

Si on fait ça pour chaque composante  $D_i \subset D$ , à la fin on a une paire  $(\tilde{X}, \tilde{D})$  avec  $\tilde{X}$  lisse et  $\tilde{D}$  SNC.

Rq: pour pouvoir faire cela, il faut pouvoir étiqueter les composantes  $\Rightarrow$  importance d'avoir  $D$  SNC au départ

(composantes sont déjà lisse et donc dans un modèle  $(xy=zu)$   $x$  et  $xy$  correspondent à 2 composantes  $\neq$ ).

**Conclusion:**

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{D} \subset \tilde{X} & \xrightarrow{f} & D \subset Y & \xrightarrow{u} & W \subset X_1 \\
 \text{log-lisse} & & \downarrow \text{f} & & \text{log-lisse} \\
 \text{et } \Delta(\tilde{D}) = \emptyset & & \downarrow & & \Delta(W) = \emptyset \\
 & & x \in X & & 
 \end{array}$$

$\Delta(D) = \emptyset$

Dans  $\pi(X, x)$  sing. isolée et  $\pi = f \circ \rho: \begin{cases} \tilde{X} \\ \tilde{D} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X \\ x \end{cases}$

est une log-résolution :

$$\pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{D}) \longrightarrow \pi_1(\tilde{D}) \simeq \pi_1(\Delta(\tilde{D})) \simeq G.$$

Il faut étudier le noyau. Par cela, on remarque que

$$\tilde{X} \setminus \tilde{D} \simeq Y \setminus D = (xy = zu) \setminus (u=0) \simeq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$$

$\Rightarrow$  les lacets méridiens ont même image ds  $\pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{D})$

La construct<sup>n</sup> a tel<sup>t</sup> de simplexe que l'on peut s'arranger

pour que les lacets méridiens soient triviaux ds  $\pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{D})$

finallement, on a bien :  $\pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{D}) \simeq \pi_1(\tilde{D}) \simeq \pi_1(\Delta(\tilde{D})) \simeq G.$

⚠ En général, les singularités construites par ce procédé sont extrêmement sauvages...

On constate que si l'on veut des énoncés de finitude, il faut se restreindre la classe de sing.

Singularités klt: Soit  $X$  un espace normal ; l'ouvert  $X_{\text{reg}}$  possède un fibré en droites  $K_{X_{\text{reg}}} := \det(T_{X_{\text{reg}}})^*$

On peut le "prolonger" : • comme un faisceau réflexif

$$\mathcal{O}(K_X) := j_* \mathcal{O}_{X_{\text{reg}}}(K_{X_{\text{reg}}}) \quad j: X_{\text{reg}} \hookrightarrow X.$$

• comme un div. de Weil : si on choisit  $D^*$  un div. de Weil qui représente  $K_{X_{\text{reg}}} (\simeq \mathcal{O}_{X_{\text{reg}}}(D))$  alors  $D^*$  se prolonge en un diviseur de Weil sur  $X$  (codim( $X_{\text{sing}}$ )  $\geq 2$  + Remment Stein)

→ Finalement,  $K_X$  existe comme  $\begin{cases} \text{diviseur de Weil} \\ \text{faisceau réflexif.} \end{cases}$  (pareil).

Pour mesurer les singularités, on compare les pôles/zéros des formes canoniques sur  $X$  avec celles sur une résolution. Pour des raisons techniques (mais pas que), on se place dans le cadre des paires  $(X, \Delta)$  avec  $\Delta = \sum_{i \in I} d_i \Delta_i$  où  $d_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$K_X + \Delta$  est  $\mathbb{Q}$ -Cartier,  $\exists m \geq 1$  tq  $m(K_X + \Delta)$  Cartier

Def (klt): La paire  $(X, \Delta)$  est dite klt si  $(d_i < 1 \ \forall i)$  et  $\exists \pi: \tilde{X} \rightarrow X$  log-résol<sup>o</sup> ( $\text{Exc}(\pi) + \pi_*^{-1}(\Delta)$  est snc) tq

$$K_{\tilde{X}} + \pi_*^{-1}(\Delta) \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_{j=1}^N a_j E_j$$

avec  $a_j > -1 \ \forall j = 1 \dots N$ .

Cas  $\Delta = 0$ :  $K_{\tilde{X}} - \sum_{j=1}^N a_j E_j \sim \pi^*(K_X)$

On se place sur  $\tilde{U} \subset \tilde{X}$  locale avec  $\text{Exc}(\pi)|_{\tilde{U}} = (z_1 \dots z_m)$

D'où, sur  $U = \pi(\tilde{U})$ ,  $\exists \omega$  forme canon volume holomorphe tq

$$\pi^*(\omega) = \tilde{\omega} \cdot z_1^{a_1} \dots z_m^{a_m} \quad \text{ie} \quad \pi^*(\omega \wedge \bar{\omega}) = \tilde{\omega} \wedge \bar{\tilde{\omega}} |z_1|^{2a_1} \dots |z_m|^{2a_m}$$

def  $\tilde{\omega} = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$   $|f(z)|^2 d\lambda(z)$

Or  $\int_{|z_i| \leq 1} |z_i|^{2a_i+1} dz_i \wedge d\bar{z}_i = \int_0^1 r^{2a_i+1} dr < +\infty$  car  $2a_i+1 > -1$ .

On peut reformuler en disant qu'il existe localement des formes volumes sur  $X_{\text{reg}}$  tq  $\int_{X_{\text{reg}}} \omega \wedge \bar{\omega} < +\infty$ .  $\square$

Rq: ① c'est une définition locale

② En écrivant  $K_{\tilde{X}} + \pi_*^{-1}(\Delta) + \sum_{a_j > -1} (-a_j) E_j \sim \pi^*(K_X + \tilde{\Delta}) + \sum_{a_j > 0} a_j E_j$

on a  $\underbrace{K_{\tilde{X}} + \tilde{\Delta}}_{\text{snc}} \sim \pi^*(K_X + \Delta) + \text{effectif et } \pi\text{-except.}$

On s'attend donc à ce que les paires klt se "comportent comme" les paires log-lisses...

Exemple 1: sing. quotients.

→ On va utiliser la propriété suivante:

Prop: Soit  $p: X' \rightarrow X$  un morphisme fini entre paires  $(X', \Delta')$  et  $(X, \Delta)$  tq  $K_{X'} + \Delta' \sim p^*(K_X + \Delta)$ .  
 Alors  $(X', \Delta')$  est klt  $\Leftrightarrow (X, \Delta)$  l'est.

Démon: on montre  $(\Rightarrow)$ . On fixe  $\hat{X} \rightarrow X$  une log-résolution de  $(X, \Delta)$  et on complète le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{q} & \tilde{X} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{avec } \mu \text{ biat.} \\ q \text{ générique}^t \text{ fini} \end{array}$$

Soit  $E$  un div. exceptionnel de  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ .

La transf. stricte d'une composante de  $\Delta$ .

au voisinage de  $E$  un pt général de  $E$ , on a  $K_{\tilde{X}} = \pi^*(K_X + \Delta) + aE$ .  
 Au dessus de  $E$  ~~par~~ via  $q$ , on peut trouver un diviseur  $E' \subset \hat{X}$  tq  $q: E' \rightarrow E$  soit génériquement finie. On note  $r$  l'ordre de ramification de  $q$  le long de  $E'$ .

On calcule de 2 façons  $K_{\hat{X}}$  au vois d'un pt général de  $E'$ .

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}} &\sim \mu^*(K_{X'} + \Delta') + a'E' \sim \mu^*p^*(K_X + \Delta) + a'E' \\ &\sim q^*\pi^*(K_X + \Delta) + a'E' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}} &\sim \underline{q^*K_{\tilde{X}} + (r-1)E'} \xrightarrow{\text{formule de ramification}} \sim q^*(\pi^*(K_X + \Delta) + aE) + (r-1)E' \\ &\sim q^*\pi^*(K_X + \Delta) + (ra + r - 1)E' \end{aligned}$$

Finalement:  $r(a+1) = a' + 1 > 0 \Rightarrow (X, \Delta)$  est klt.  $\square$