REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES KÄHLÉRIENS : FACTORISATIONS ET CONJECTURE DE SHAFAREVICH LINÉAIRE

FRÉDERIC CAMPANA, BENOÎT CLAUDON, PHILIPPE EYSSIDIEUX

Résumé. Nous étendons aux variétés kählériennes compactes quelques résultats classiques sur les représentations linéaires des groupes fondamentaux des variétés projectives lisses. Notre approche, basée sur une interversion de fibrations à fibres tores vs variétés de type général, fournit une alternative à celle de [Zuo96]. Enfin nous étendons au cas kählérien les résultats généraux de convexité holomorphe pour les revêtements associés connus dans le cas projectif.

Table des matières

1. Introduction

Les travaux fondamentaux de Corlette et Simpson sur les représentations linéaires complexes des groupes fondamentaux des variétés kählériennes compactes [Sim92, Sim93, Sim94a, Sim94b] ainsi que ceux de Gromov et Schoen sur leurs représentations à valeurs dans des corps locaux [GS92] ont permis d'améliorer notre compréhension des groupes fondamentaux des variétés algébriques lisses [Zuo96, Zuo99, JosZuo00, LasRam96] -voire aussi le survey [ABCKT96]- et des revêtements associés [KatRam98, Eys04]. Le développement de ces idées a permis récemment d'établir que le revêtement universel d'une variété projective lisse complexe de groupe fondamental linéaire est holomorphiquement convexe [EKPR12] -voir aussi [Eys11] pour un survey récent.

Date: 24 Janvier 2014.

La première motivation de ce travail était de généraliser au cas des variétés kählériennes compactes les résultats de [Eys04, EKPR12]. Ceux ci sont limités au cas projectif car plusieurs résultats sur la théorie des représentations du groupe fondamental qui sont utilisés de façon essentielle dans [Eys04] ne sont pas disponibles dans la littérature pour le cas kählérien général. Ces résultats sont l'ubiquité des Variations de Structure de Hodge [Sim92] et la théorie des ensembles constructibles absolus de classes de conjugaison de représentations linéaires complexes [Sim93]. Le présent article remédie à cette déficience de la littérature en établissant une version kählérienne de ces outils.

Notre approche repose sur un travail important de Zuo [Zuo96] dont le résultat principal doit être vu comme une formulation du principe que la théorie des représentations linéaires complexes des groupes kählériens se ramène au cas projectif. Nous affinons ce principe en l'unifiant avec l'existence du morphisme de Shafarevich (voir la définition 2.13) :

Théorème 1.
Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \to GL_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire d'image Zariski dense dans un groupe semi-simple. Alors le morphisme de Shafarevich $sh_\rho : X \to Sh_\rho(X)$ existe et $Sh_\rho(X)$ est une variété projective algébrique normale de type général si $\rho(\pi_1(X))$ est sans torsion. De plus, si $e : X' \to X$ est un revêtement étale fini tel que $e^*\rho(\pi_1(X'))$ est sans torsion, $e^*\rho$ factorise par un modèle lisse de $Sh_{e^*\rho}(X')$.

On notera que l'existence d'un tel e est impliquée par le lemme de Selberg. En raison d'un point délicat dans la preuve de [Zuo96], nous avons fourni une démonstration nouvelle de ses résultats, basée sur [Eys04] et un énoncé qui nous semble d'un intérêt indépendant :

Théorème 2.
Soit X une variété kählérienne compacte et $f : X \longrightarrow K$ une application holomorphe dans une variété de Kummer dont les composantes connexes des fibres lisses sont de type général.

Il existe alors une application holomorphe génériquement finie $r : X' \longrightarrow X$, une application biméromorphe $X' \dashrightarrow X''$ et $g : X'' \longrightarrow Y$ un fibré principal holomorphe de groupe structurel un tore complexe, Y étant une variété algébrique de type général.

L'ingrédient principal de la preuve est l'additivité des dimensions de Kodaira quand la fibre est de type général dans le cas kählérien [Nak99].

Ainsi formulé, le principe de Zuo permet de donner une définition d'ensemble constructible absolu de la variété des caractères du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte généralisant [Sim93] puis de généraliser au cas kählérien les résultats de [Eys04, EKPR12] :

Théorème 3.
Soit X une variété kählérienne compacte, G un groupe algébrique linéaire réductif défini sur $\mathbb{Q}$ et $M \subset M_B(X,G)$ un ensemble constructible absolu de la variété des caractères associée.

Considérons $\widetilde{H^0_M}$ le sous-groupe de $\pi_1(X)$ défini comme l'intersection des noyaux de toutes *les représentations semisimples $\pi_1(X) \longrightarrow G(\mathbb{C})$ dont la classe de conjugaison est dans M et, si $M = M_B(X,G)$, $\widetilde{H^\infty_M}$ le sous-groupe de $\pi_1(X)$ défini comme l'intersection des noyaux de* toutes *les représentations $\pi_1(X) \longrightarrow G(A)$ où A est une $\mathbb{C}$-algèbre arbitraire.*

Le revêtement galoisien de groupe $\widetilde{H^0_M}$ (resp. $\widetilde{H^\infty_M}$)

$$\widetilde{X^*_M} := \widetilde{X^u}/\widetilde{H^*_M}, \quad * = 0, \infty$$

est alors holomorphiquement convexe.

On établira enfin un théorème de structure pour la Γ-réduction d'une représentation linéaire d'un groupe kählérien :

Théorème 4.
Soit X une variété kählérienne compacte, Soit $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire. Alors si $e : X' \to X$ est un revêtement étale fini tel que $e^*\rho(\pi_1(X'))$ est sans torsion, la Γ-réduction $Sh_{e^*\rho}(X')$ est biméromorphe à l'espace total d'une fibration lisse $\tau : Sh_\rho(X) \to S_\rho(X)$ en tores complexes sur une variété algébrique $S_\rho(X)$, de type général.

Outre les éléments cités ci-dessus, la démonstration utilise une nouvelle fois de façon cruciale [Nak99] via ses résultats sur les fibrations en Q-tores.

Décrivons maintenant le contenu de l'article. La section 2 donne les définitions et les premières propriétés de la Γ-réduction et du morphisme de Shafarevich. La section 3 donne une démonstration du théorème 1. La section 4 traite les résultats que nous venons d'énoncer dans le cas des représentations linéaires résolubles des groupes kählériens comme prélude à l'étude du cas général. La section 5 établit les résultats de convexité holomorphe du théorème 3. La section 6 établit le théorème 4.

Nous remercions S. Druel, V. Koziarz, M. Păun et C. Voisin pour d'utiles remarques relatives à ce travail.

Remarque : Il est naturel d'appliquer ce travail à une question liée au problème de Serre de caractériser les groupes de présentation finie apparaissant comme groupes fondamentaux d'une variéte projective complexe (groupes projectifs complexes) : est ce que tout groupe kählérien (groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte) est un groupe projectif complexe ?

La première version diffusée de ce travail arXiv :1302.5016v1 contenait une preuve erronée de l'énoncé suivant qui implique que tout groupe kählérien linéaire est commensurable à un groupe projectif complexe.

Théorème 5.
Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ une représentation linéaire de son groupe fondamental. Il existe alors une variété projective lisse Y et $\sigma : \pi_1(Y) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation dont l'image est un sous-groupe d'indice fini de Γ.

En particulier, si $\pi_1(X)$ est un groupe kählérien linéaire, il existe une variété projective lisse ayant pour groupe fondamental un sous groupe d'indice fini de $\pi_1(X)$.

Un travail en cours de rédaction donnera une preuve de cet énoncé utilisant des techniques du problème de Kodaira. Ces techniques étant de nature assez différente des présentes, nous préférons renoncer à traiter ici cette application.

2. Γ-réduction et morphisme de Shafarevich

2.1. **Γ-réduction.** Soit X une variété kählérienne compacte connexe, $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ un morphisme de groupes surjectif, $u_{univ} : \tilde{X}^u \to X$ le revêtement universel et $u_\rho : \tilde{X}_\rho := \mathrm{Ker}(\rho)\backslash\tilde{X}^u \to X$ le revêtement associé à ρ.

Théorème 2.1 ([Cam94])**.**
Il existe une application presque-holomorphe propre et connexe de variétés kählériennes $\tilde{g}_\rho : \tilde{X}_\rho \dashrightarrow \tilde{Y}$, Γ-équivariante, telle que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{X}_\rho$ très général la fibre de $\tilde{g}_\rho$ passant par $\tilde{x}$ est le plus grand sous-ensemble analytique compact et connexe de $\tilde{X}_\rho$ passant par $\tilde{x}$. De plus, $\tilde{g}_\rho$ est unique à équivalence biméromorphe près.

Rappelons qu'une application méromorphe $f : X \dashrightarrow Y$ est dite presque holomorphe si l'image de son lieu d'indétermination n'est pas Y ; de façon équivalente, cela signifie qu'elle induit une fibration propre entre des ouverts de Zariski de X et Y. Rappelons également qu'un point d'un espace complexe irréductible est dit très général s'il n'est pas contenu dans une réunion dénombrable de sous-espaces analytiques fermés stricts.

Prenant les quotients par Γ, nous obtenons :

Corollaire 2.2 ([Cam94], [Kol93])**.**
Il existe une application presque holomorphe et connexe, unique à équivalence biméromorphe près, $g_\rho : X \dashrightarrow G_\rho(X)$ vérifiant la propriété suivante : si $f : Z \longrightarrow X$ est une application holomorphe (avec Z un espace complexe irréductible et normal) dont l'image passe par un point très général de X, $g_\rho \circ f$ est constante si et seulement si la composée $\pi_1(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma$ est d'image finie.

Remarque 2.3. *L'application g_ρ est appelée Γ-réduction dans* [Cam94] *et son introduction a été motivée par l'usage des séries de Poincaré et le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah par* [Gro91]*. Lorsque X est projective,* *elle est introduite dans* [Kol93] *sous le nom d'application de Shafarevich associée à ρ. Nous suivrons ici la première terminologie, réservant la terminologie de morphisme de Shafarevich à une notion plus précise définie plus loin.*

Définition 2.4.
Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe entre espaces complexes compacts normaux. Un modèle lisse de f est un diagramme $X \xleftarrow{r} \hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y} \xrightarrow{s} Y$ tel que r et s sont des applications holomorphes biméromorphes propres, $\hat{f}$ est holomorphe, $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ des variétés lisses et $s \circ \hat{f} = f \circ r$. Un modèle lisse de f est net s'il existe $p : \hat{X} \to X'$ une application holomorphe biméromorphe avec X' lisse telle que tout diviseur $\hat{f}$-exceptionnel est p-exceptionnel.

Par [Cam04, Lemma 1.3], toute fibration méromorphe a un modèle lisse et net.

Définition 2.5.
Nous appellerons géométrique *tout quotient abélien Γ de $\pi_1(X)$ vérifiant la propriété suivante : il existe A un tore complexe et une application holomorphe $a : X \to A$ tel que Γ apparaisse comme l'image de $\pi_1(X)$ dans $\pi_1(A)$ sous a.*

Exemple 2.6. Si Γ est abélien, on peut donner une description simple de g_ρ à l'aide du morphisme d'Albanese $\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ de X. En effet : Γ est alors un quotient de $\pi_1(X)^{ab} = H_1(X, \mathbb{Z})$, l'abélianisé de $\pi_1(X)$. Soit K le noyau du quotient $H_1(X, \mathbb{Z}) \to \Gamma$, et $B \subset \mathrm{Alb}(X)$ le plus grand sous-tore complexe $T \subset \mathrm{Alb}(X)$ tel que $\pi_1(T) < \pi_1(\mathrm{Alb}(X)) = H_1(X, \mathbb{Z})$ soit contenu dans K. Soit $q : \mathrm{Alb}(X) \to A_\rho = \mathrm{Alb}(X)/B$ le quotient. Alors g_ρ est la factorisation de Stein de la composée (non surjective, en général) $q \circ \alpha_X : X \to A_\rho$.

Le groupe $\pi_1(A_\rho) = \pi_1(\mathrm{Alb}(X))/K$ est un quotient abélien géométrique de $\Gamma = \Gamma^{ab}$, et le noterons Γ_ρ^{geom}.

2.2. **Factorisation des représentations par la Γ-réduction.**

Lemme 2.7.
Soit $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ un quotient de $\pi_1(X)$ avec Γ sans torsion. Si $g_\rho : X \longrightarrow Y$ désigne un modèle lisse de la Γ-réduction de X, la représentation ρ se factorise par g_ρ, i.e. : il existe un morphisme de groupes rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "g_{\rho *}"'] & & \Gamma \\ & \pi_1(Y) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, on dira aussi que ρ se factorise par $G_\rho(X)$.

Démonstration : Considérons un modèle net $g_\rho : X \longrightarrow Y$ de la Γ-réduction de X et munissons Y de la structure orbifolde (pour les multiplicités classiques) induite par Δ [Cam04, Cam11a, Cam11b]. L'adjonction du $\mathbb{Q}$-diviseur Δ a pour effet de rendre la suite des groupes fondamentaux exacte :

$$\pi_1(X_y) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y/\Delta) \longrightarrow 1.$$

D'autre part, le groupe fondamental orbifolde de (Y/Δ) se présente naturellement sous la forme :

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow \pi_1(Y/\Delta) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow 1$$

où T est un groupe engendré par des éléments de torsion. Par définition de g_ρ, $\rho(\pi_1(X_y))$ est fini donc trivial et ρ se factorise donc par $\pi_1(Y/\Delta)$. A nouveau, comme Γ est sans torsion, l'image T par ρ doit être triviale, ce qui signifie exactement que ρ se factorise par $\pi_1(Y)$. $\square$

Le lemme de Selberg stipule que si $\Gamma < \mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$ est de type fini, Γ admet un sous-groupe d'indice fini Γ' sans torsion. Combiné avec le lemme 2.7, il permet de déduire :

Corollaire 2.8.
Soit $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma < \mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$ un quotient linéaire de $\pi_1(X)$. Il existe un revêtement étale fini $e : X' \to X$ tel que si $\rho' : \pi_1(X') \to \Gamma' := \rho(e_*\pi_1(X'))$ est la restriction de ρ, alors ρ' se factorise par un modèle lisse $g_{\rho'} : X' \to Y' := G_{\rho'}(X')$ de la Γ' réduction de X'. Cette propriété subsiste pour tout revêtement étale $X'' \to X$ dominant X'.

2.3. **Fonctorialité, Groupe quotient.** Les propriétés élémentaires suivantes de fonctorialité et de représentation quotient se déduisent sans difficulté de la propriété de base de la Γ-réduction et nous en ommettrons la preuve.

Introduisons les notations suivantes : si $f : U \to V$ est une application holomorphe propre (non nécessairement surjective) entre espaces analytiques complexes, avec U normal et connexe, nous noterons $St(f) : U \to St(U/V)$ et $st(f) : St(U/V) \to V$ sa factorisation de Stein où $St(U/V)$ est normal, $f = St(f) \circ st(f)$, $St(f)$ est à fibres connexes et $st(f)$ est finie, d'image $f(X)$.

Lemme 2.9.
Soit $f : W \to X$ une application holomorphe surjective entre variétés compactes Kählériennes connexes, et $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ un quotient du groupe fondamental de X. Soit $\rho_f := f^*(\rho) = \rho \circ f_* : \pi_1(W) \dashrightarrow \Gamma_f := Im(\rho_f)$. Alors $g_{\rho_f} : W \dashrightarrow G_{\rho_f}(W)$ est la factorisation de Stein de la composée $g_\rho \circ f : W \dashrightarrow G_\rho(X)$ i.e. : $g_{\rho_f} = St(g_\rho \circ f)$.

Lemme 2.10.
Soit $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma < \mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$ un quotient linéaire de $\pi_1(X)$. Soit $g_\rho : X \dashrightarrow Y := G_\rho(X)$ sa Γ-réduction. Soit $\Delta < \Gamma$ un sous-groupe

normal et $\bar{\Delta}$ son adhérence de Zariski dans $\mathrm{Gl}_N(\mathbb{C})$. Notons H le sous-groupe normal de Γ défini par $H := \Gamma \cap \bar{\Delta}$. La représentation composée $\sigma : \pi_1(X) \to \Gamma/H < \bar{\Gamma}/\bar{\Delta}$ est alors un quotient linéaire de $\pi_1(X)$. Soit $g_\sigma : X \dashrightarrow Z := G_\sigma(X)$ la Γ/H-réduction de X.

(1) Il existe alors une application méromorphe dominante $g_{\rho/\sigma} : Y := G_\rho(X) \dashrightarrow Z := G_\sigma(X)$ telle que $g_\sigma = g_{\rho/\sigma} \circ g_\rho$ et la restriction $g_{\rho/\sigma,z} : X_z \to Y_z$ à une fibre très générale X_z de g_σ n'est autre que la Γ_z-réduction de X_z où σ_z désigne la restriction de σ à $\pi_1(X_z)$ et $\Gamma_z = \sigma_z(\pi_1(X_z))$.

(2) Si les images de ρ et σ sont sans torsion, ce qui est le cas quitte à remplacer X par un revêtement étale fini, ρ, σ et σ_z se factorisent respectivement par Y, Z, et Y_z.

(3) Si ρ (et donc σ) se factorise par g_ρ et si $\rho^* : \pi_1(G_\rho(X)) \to \Gamma$ (resp. $\sigma^* : \pi_1(G_\rho(X)) \to \Gamma/H$) factorisent ρ (resp. σ), alors : $G_{\sigma^*}(G_\rho(X)) = G_\sigma(X)$ et $g_{\rho/\sigma} = g_{\sigma^*}$.

Le diagramme commutatif correspondant est :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g_\rho"] \arrow[dr, "g_\sigma"'] & & G_\rho(X) := Y \arrow[dl, "g_{\rho/\sigma}"] \\ & G_\sigma(X) := Z & \end{tikzcd}$$

Nous utiliserons ce lemme de différentes manières : en prenant pour $\bar{\Delta}$ le radical résoluble de $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}/\bar{\Delta}$ étant alors semi-simple, mais aussi en considérant pour Δ l'image par ρ de $\pi_1(X_w)$, si X_w est la fibre générale d'une fibration presque-holomorphe $f : X \to W$ (sans lien avec ρ, a priori).

2.4. **Quotient par un groupe abélien.** Nous allons donner une description de la situation du lemme 2.10 lorsque H est abélien. C'est aussi une version relative de l'exemple 2.6 ci-dessus.

Rappelons (*cf.* [Cam85]) que si $f : X \to S$ est une application holomorphe surjective à fibres connexes avec X kählérienne compacte, il existe une application d'Albanese relative $\alpha_{X/S} : X \dashrightarrow \mathrm{Alb}(X/S)$, au-dessus de S, presque holomorphe au-dessus du lieu de lissité de f, dans laquelle : $\mathrm{Alb}(X/S)$ est kählérienne compacte, $\alpha(f) : \mathrm{Alb}(X/S) \to S$ est holomorphe à fibres connexes avec $f = \alpha(f) \circ \alpha_{X/S}$, telle que, si $X_s := f^{-1}(s), s \in S$ est lisse, alors $\mathrm{Alb}(X/S)_s = \alpha(f)^{-1}(s)$ est isomorphe à $\mathrm{Alb}(X_s)$ (variété d'Albanese de X_s) et telle que la restriction de $\alpha_{X/S}$ à X_s est un morphisme d'Albanese pour X_s. En général, $\alpha_{X/S}$ n'est ni surjective ni connexe.

Lemme 2.11.
Soit $f : X \to Z$ une application holomorphe surjective à fibres connexes,

$z \in Z$ un point très général et H un quotient géométrique de $\pi_1(X_z)^{ab}$. Il existe alors une application presque-holomorphe surjective

$$q_H : \mathrm{Alb}(X/Z) \to A_H(X/Z)$$

au-dessus de Z, dans laquelle $\tau_H : A_H(X/Z) \dashrightarrow Z$ est une fibration dont les fibres lisses sont des tores, et telles que la restriction

$$q_{H,z} : \mathrm{Alb}(X/Z)_z \dashrightarrow A_H(X/Z)_z$$

de q_H au-dessus de z est le quotient du tore $\mathrm{Alb}(X/Z)_z$ sur le tore $A_H(X/Z)_z$ dont le groupe fondamental est H, quotient de $\pi_1(\mathrm{Alb}(X/Z)_z)$.

Démonstration : La donnée de H détermine à translation près un unique sous-tore B_z de $\mathrm{Alb}(X/Z)_z$, variant holomorphiquement avec $z \in Z$ général. La projection sur son espace de paramètres du graphe de la famille universelle (dans l'espace des cycles de Chow-Barlet de $\mathrm{Alb}(X)$) de sous-tores relatifs de $\mathrm{Alb}(X/Z)$ sur Z est l'application q_H, l'espace de paramètres étant $A_H(X/Z)$. $\square$

Comme conséquence immédiate du lemme 2.10, nous obtenons l'énoncé suivant.

Lemme 2.12.
Soit $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ un quotient (avec X kählérienne compacte et connexe). Soit $H \lhd \Gamma$ un sous-groupe abélien normal et $\sigma := s \circ \rho : \pi_1(X) \to \Gamma/H$ le quotient correspondant. Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g_\rho"] \arrow[dr, "g_\sigma"'] & & G_\rho(X) := Y \arrow[dl, "g_{\rho/\sigma}"] \\ & G_\sigma(X) := Z & \end{tikzcd}$$

où $g_\rho = St(q_{H^{geom}} \circ \alpha^*_{X/Z})$ et où $q_{H^{geom}} : \mathrm{Alb}(X/Z) \to A_{H^{geom}}(X/Z)$ étant le quotient naturel associé au groupe H^{geom} par le lemme 2.11.

2.5. Morphisme de Shafarevich.

Si $\widetilde{X_\rho}$ est holomorphiquement convexe, il admet une réduction de Remmert : $r : \widetilde{X_\rho} \longrightarrow R\left(\widetilde{X_\rho}\right)$, c'est à dire une application Γ-équivariante propre sur un espace (normal) de Stein. Le morphisme quotient $g_\rho : X \longrightarrow (R\left(\widetilde{X_\rho}\right)/\Gamma)$ est alors une Γ-réduction possédant la propriété suivante :

Définition 2.13.
Un modèle $g_\rho : X \longrightarrow Y$, Y pouvant être un espace complexe normal, de la Γ-réduction sera appelé morphisme de Shafarevich *associé à ρ si :*

(i) g_ρ est holomorphe,

(ii) pour toute application holomorphe $f : Z \longrightarrow X$ *(avec* Z *espace complexe compact connexe),* $g_\rho \circ f$ *est un point si et seulement si l'image de* $\pi_1(Z)$ *par* $\rho \circ f_*$ *est finie.*

On notera cet unique modèle : $sh_\rho : X \to Sh_\rho(X)$ *lorsqu'il existe.*

Remarque 2.14. *L'existence d'un morphisme de Shafarevich est un propriété strictement plus faible que la convexité holomorphe de* $\widetilde{X_\rho}$ *: il suffit qu'existe une fibration holomorphe propre* $\widetilde{X_\rho} \to R(\widetilde{X_\rho})$ *telle que* $R(\widetilde{X_\rho})$ *ne contienne pas de sous-espace analytique compact de dimension strictement positive (sans être pour autant Stein).*

Exemple 2.15. Lorsque Γ est abélien, il existe toujours un morphisme de Shafarevich : celui donné dans l'exemple 2.6. Par contre, $\widetilde{X_\rho}$ n'est pas toujours holomorphiquement convexe dans ce cas (il existe des quotients sans fonction holomorphe non constante de $\mathbb{C}^n, n \geq 2$ par des réseaux partiels, dits « groupes de Cousin »).

Exemple 2.16. Lorsque Γ est abélien géométrique, alors $\widetilde{X_\rho}$ est holomorphiquement convexe.

3. Réduction au cas projectif de l'étude des représentations linéaires semi-simples des groupes kählériens

Cette section donne une preuve alternative d'un théorème fondamental de factorisation dû à Zuo [Zuo96] (théorème 3.9) et en dérive quelques conséquences connues mais non documentées dans la littérature comme le théorème d'ubiquité de Simpson dans le cas kählérien. Notre démonstration du théorème necessite plusieurs étapes.

1. Cas d'une représentation ρ associée à une variation de structures de Hodge complexes, lorsque la monodromie est discrète. Alors $Sh_\rho(X)$ est de type général.
2. Cas d'une représentation semi-simple. Nous utiliserons ici l'énoncé d'interversion des fibrations du théorème 3.1.
3. Cas d'une représentation réductive.

3.1. Interversion des fibrations.

Nous montrons ici un résultat qui peut être vu comme un phénomène d'échange des rôles fibre/base dans une fibration et susceptible d'applications autres que celle donnée dans le présent article.

Théorème 3.1.
Soit X *une variété kählérienne compacte et* $f : X \longrightarrow K$ *une application holomorphe dans une variété de Kummer dont les composantes connexes des fibres lisses sont de type général.*

Il existe alors une application holomorphe génériquement finie $r : X' \longrightarrow X$*, une application biméromorphe* $X' \dashrightarrow X''$ *et* $g : X'' \longrightarrow Y$

un fibré principal holomorphe de groupe structurel un tore complexe, Y étant une variété algébrique de type général.

Par variété de Kummer, on entend un quotient d'un tore complexe compact par un groupe fini d'automorphismes.

Remarque 3.2. *Comme on pourra l'observer dans la démonstration ci-dessous, la fibration $X' \longrightarrow Y$ n'est autre que la fibration d'Iitaka-Moishezon de X'. Il est bien connu que la base de la fibration correspondante pour X n'est pas toujours de type général. En effet, il suffit de considérer $X = C \times E/\langle\sigma, \tau\rangle$ où C est une courbe hyperelliptique (de genre $g \geq 2$), σ l'involution correspondante et E une courbe elliptique munie d'un point τ d'ordre 2. La deuxième projection donne (en passant au quotient) une fibration sur une courbe elliptique (en courbe hyperbolique) :*

$$X \longrightarrow E/\langle\tau\rangle$$

alors que la première projection fournit la fibration d'Iitaka-Moishezon :

$$X \longrightarrow C/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1.$$

Le cas où X est projective est sans intérêt et résulte de l'existence d'un revêtement ramifié de X qui est de type général. Il est standard [Uen75] *que, dans le théorème 3.2, X et X' ont la même dimension algébrique $a(X)$ et, quitte à faire un revêtement fini supplémentaire, on peut encore assurer que $\dim(Y) = a(X)$ et que g est la réduction algébrique de X'.*

On aimerait, sous des hypothèses supplémentaires sur f, pouvoir conclure que r peut être pris étale. Nous n'avons pas trouvé de formulation raisonnable et n'obtiendrons cette précision que dans les cas très particuliers où ce théorème sera appliqué.

Démonstration du théorème 3.1: Comme K est une variété de Kummer, nous pouvons d'ores et déjà opérer un changement de base (génériquement fini) pour nous ramener à une application $f : X \longrightarrow T$ où T est un tore et où les composantes connexes des fibres générales sont de type général. L'image de X dans T est une sous-variété irréductible $Z := f(X)$ de dimension de Kodaira $\kappa(Z) \geq 0$. L'additivité des dimensions de Kodaira pour les fibres de type général ([Kol87] dans le cas projectif, [Nak99, Th. 5.7] dans le cas Kählérien) montre alors que :

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_t) + \kappa(Z) = \dim(X_t) + \kappa(Z) > 0$$

où X_t désigne la fibre générale de f (supposée de dimension strictement positive). Cela signifie que la fibration d'Iitaka-Moishezon de X est non constante ; notons la $J : X \longrightarrow Y$. Si X_y désigne la fibre de J en $y \in Y$ général, elle vérifie $\kappa(X_y) = 0$ et son image dans T est un translaté d'un sous-tore A_y de T. En effet, X_y étant spéciale [Cam11a], son image dans T l'est également et le théorème d'Uneo [Uen75, Th. 10.9] montre que les seules sous-variétés spéciales d'un tore sont les translatés de sous-tores. Par rigidité des sous-tores, le sous-tore A_y est indépendant de y et on note désormais $A = A_y$. Il est clair que Z est invariant par l'action de A par translation sur T. Considérons alors $p_A : T \longrightarrow B := T/A$ le quotient de T par A et $W \subset B$ l'image de X par $p_A \circ f$. Les fibres de J étant envoyées sur des points par $p_A \circ f$, il existe une application $Y \longrightarrow W$ rendant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "J"'] & Z \arrow[d, "p_A"] \\ Y \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

commutatif et nous pouvons donc examiner l'application $\mu : X \longrightarrow Y \times_W Z$ (qui est surjective par définition de A). Nous allons montrer que μ est génériquement finie. Cela revient à montrer que f est génériquement finie en restriction à $f_y : X_y \longrightarrow A_y := f(X_y)$; supposons que cela ne soit pas le cas et considérons $\tilde{f}_y := St(f_y) : X_y \longrightarrow \tilde{A}_y := St(X_y/A_y)$ la factorisation de Stein de f_y. Comme y est général, les fibres (lisses) de $\tilde{f}_y$ sont des sous-variétés générales des fibres (générales) de f : elles sont donc elles aussi de type général. Nous pouvons à nouveau appliquer l'additivité :

$$0 = \kappa(X_y) \geq \kappa(\tilde{F}_y) + \kappa(\tilde{A}_y) = \dim(\tilde{F}_y)$$

(où $\tilde{F}_y$ désigne la fibre générale de $\tilde{f}_y$). Nous obtenons la contradiction souhaitée si f_y n'est pas génériquement finie. En particulier, X_y est biméromorphe à $\tilde{A}_y$ qui est un revêtement étale fini de A_y par [Kaw81, Theorem 22, p269] (voir aussi [Cam04, Prop. 5.3]).

Le sous-groupe $\pi_1(\tilde{A}_y)$ est donc d'indice fini dans $\pi_1(A)$, lui même contenu dans $\pi_1(T)$ avec $\pi_1(B)$ pour quotient. Puisque ces trois groupes sont abéliens libres de type fini on a même un isomorphisme $\pi_1(B) \simeq \pi_1(A) \times \pi_1(T)$. Il existe donc un sous-groupe d'indice fini $\Gamma' \leq \pi_1(T)$ dont l'intersection avec $\pi_1(A)$ coïncide avec $\pi_1(\tilde{A}_y)$ et vérifiant $\Gamma'/\pi_1(A) = \pi_1(B)$. Considérons le revêtement $\pi : T' \longrightarrow T$ correspondant au sous-groupe Γ' et $p : X' \longrightarrow X$ le revêtement étale obtenu par changement de base. La factorisation de Stein de la composée $X' \xrightarrow{p} X \xrightarrow{J} Y$ permet de compléter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "J'"'] & Z' \arrow[d, "\pi\circ p_A"] \\ Y' \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

Dans cette nouvelle configuration, l'application $\mu' : X' \longrightarrow Y' \times_W Z'$ est maintenant biméromorphe et la fibration $J' : X' \longrightarrow Y'$ est ainsi obtenue comme image réciproque de la fibration en tore $Z' \longrightarrow W$ (de fibre $\tilde{A}$) par le changement de base $Y' \longrightarrow W$. En particulier, le fibré canonique relatif $K_{X'/Y'}$ est trivial et cela implique

$$\dim(Y') = \dim(Y) = \kappa(X) = \kappa(X') = \kappa\left(X', (J')^* K_{Y'}\right) = \kappa(Y'),$$

c'est à dire que Y' est bien de type général. □

3.2. **Variétés des caractères et correspondance de Simpson.** Rappelons quelques faits de base sur l'espace de modules des représentations linéaires d'un groupe de type fini. Si Γ désigne un groupe de type fini et G un groupe algébrique linéaire défine sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on notera $R_B(\Gamma, G)$ le schéma affine représentant le foncteur $S \mapsto \mathrm{Hom}(\Gamma, G(S))$. Le schéma des caractères $M_B(\Gamma, G)$ est défini comme le quotient GIT $R_B(\Gamma, G)//G$ (G agissant par conjugaison) ; il s'agit donc d'un schéma affine dont les points sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle $\bar{k}$ sont représentés par les classes de conjugaison des représentations réductives (voir, par exemple, [LubMag85]). Tout point de $M_B(\Gamma, G)(\bar{k})$ sera systématiquement représenté par une telle classe de conjugaison.

Si $\Gamma = \pi_1(X, x)$, nous utiliserons la notation transparente $M_B(X, G) := M_B(\Gamma, G)$ (le changement de point base s'effectuant *via* un automorphisme intérieur, il ne joue aucun rôle dans la définition de M_B).

Remarque 3.3. *Soit G et G' des groupes réductifs, X et Y des variétés kählériennes compactes. Toute application méromorphe $f : X \dashrightarrow Y$ induit un morphisme entre les schémas de caractères $f^* : M_B(Y, G) \longrightarrow M_B(X, G)$. De même, tout morphisme $i : G \longrightarrow G'$ induit un morphisme $i_* : M_B(X, G) \longrightarrow M_B(X, G')$.*

Pour terminer, nous revenons sur la correspondance de Simpson et précisons les résultats disponibles dans la catégorie kählérienne. Cette correspondance établit une équivalence de catégories entre les représentations réductives du groupe fondamental et les fibrés de Higgs polystables à classes de Chern nulles (voir [Sim92, Sim94b] pour les notions utilisées).

Théorème 3.4.
Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et (E, θ) un fibré de Higgs polystable vérifiant

$$\int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1} = \int_X c_2(E) \wedge \omega^{n-2} = 0.$$

Le fibré E provient alors d'une représentation réductive du groupe fondamental de X.

Un des grands succès de la théorie de C. Simpson réside en la construction pour X projective d'un espace de modules $M_{Dol}(X, G)$ de classes d'isomorphisme de G-fibrés de Higgs polystables (avec $c_1 = c_2 = 0$)

[Sim94a, Sim94b]. Or, cet espace porte une action naturelle[1] de $\mathbb{C}^*$; si $[(E,\theta)] \in M_{Dol}(X,G)$ et $t \in \mathbb{C}^*$, on pose :

$$t \cdot [(E,\theta)] := [(E,t\theta)].$$

De plus, la correspondance de Simpson s'incarne en un homéomorphisme des espaces topologiques sous-jacents :

$$M_{Dol}(X,G)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} M_B(X,G)(\mathbb{C}).$$

Si X est seulement supposée kählérienne, l'espace $M_{Dol}(X,G)$ n'a pas d'existence *a priori* mais l'action de $\mathbb{C}^*$ persiste [2] sur $M_B(X,G)$: si $[\rho] \in M_B(X,G)$ et (E,θ) est le fibré provenant de ρ, nous noterons $[\rho_t]$ la (classe d'isomorphisme de la) représentation associée à $(E,t\theta)$. Nous appellerons $([\rho_t])_{t\in\mathbb{C}^*}$ la famille des déformations de Simpson de $[\rho]$.

Si X est projective, l'action de $\mathbb{C}^*$ sur la variété quasi-projective $M_{Dol}(X,G)$ est algébrique et la limite

$$\lim_{t\to 0}[(E,t\theta)]$$

existe dans $M_{Dol}(X,G)$. La classe d'isomorphisme correspondante est alors un point fixe de l'action de $\mathbb{C}^*$: il s'agit de la classe de conjugaison d'une représentation sous-jacente à une variation de structures de Hodge polarisables (nous utiliserons l'acronyme $\mathbb{C}$-VSH dans la suite en dépit de son inélégance) [Sim92]. Ce phénomène est connu sous le nom d'ubiquité des variations de structures de Hodge : toute représentation du groupe fondamental de X peut être déformée en une $\mathbb{C}$-VSH. En effet toute représentation linéaire sur $\mathbb{C}$ se déforme à sa semisimplifiée qui est réductive.

3.3. **Factorisation : cas d'une $\mathbb{C}$-VSH discrète.** Nous abordons maintenant le problème de factorisation des représentations linéaires des groupes kählériens. Comme annoncé ci-dessus, la première étape consiste à examiner le cas particulier d'une $\mathbb{C}$-VSH discrète. Soit donc $(\mathbb{V},\mathcal{F}^\bullet,S)$ une $\mathbb{C}$-VSH polarisée sur une variété kählérienne compacte X ; nous noterons $\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow U(\mathbb{V}_x,S_x)$ la représentation de monodromie associée au choix d'un point base $x \in X$.

Proposition 3.5.
Dans la situation décrite ci-dessus, supposons de plus que la représentation de monodromie est discrète. *Le morphisme de Shafarevich $X \longrightarrow Sh_\rho(X)$ associé à ρ existe et $Sh_\rho(X)$ est de type général à revêtement étale fini près. Plus précisément, si $e : \bar{X} \longrightarrow X$ est un revêtement étale fini tel que $\rho(\pi_1(\bar{X}))$ soit sans torsion, alors $Sh_{e^*(\rho)}(\bar{X})$ est de type général.*

[1]Ce phénomène a été découvert par [Hit87] en dimension 1.

[2]Prendre garde au fait que cette action n'est pas algébrique en général.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer que l'image de $\pi_1(X)$ par ρ est sans torsion. Considérons alors l'application de période de $(\mathbb{V}, \mathcal{F}^\bullet, S)$. Il s'agit d'une application holomorphe ρ-équivariante :

$$\tilde{X} \longrightarrow \mathcal{D} = U(\mathbb{V}_x, S_x)/V$$

avec $V = \prod_k U(\mathbb{V}_x^{k,-k})$. L'hypothèse sur le caractère discret de ρ montre que cette application descend en un morphisme $X \longrightarrow \mathcal{D}/\rho(\pi_1(X))$ dont la factorisation de Stein n'est autre que le morphisme de Shafarevich relativement à ρ :

$$sh_\rho : X \longrightarrow Sh_\rho(X),$$

$Sh_\rho(X)$ étant alors une variété projective normale (consulter [Eys04, p. 524-525]) que nous désignerons par Y pour ne pas alourdir les notations.

La $\mathbb{C}$-VSH $(\mathbb{V}, \mathcal{F}^\bullet, S)$ descend[3] sur Y en une $\mathbb{C}$-VSH notée $(\mathbb{V}_Y, \mathcal{F}^\bullet, S)$. Si $\pi : Y^* \longrightarrow Y$ est une désingularisation de Y, $\pi^*(\mathbb{V}_Y, \mathcal{F}^\bullet, S)$ est une $\mathbb{C}$-VSH dont l'application de période p est génériquement immersive. Le fibré équivariant $T_\mathcal{D}$ descend également sur Y^* en un fibré E, la différentielle de l'application de période devenant un morphisme de fibrés $p_* : T_{Y^*} \longrightarrow E$. Remarquons que, quitte à remplacer Y^* par un autre modèle birationnel, nous pouvons supposer que l'image de $T_{Y^*} \longrightarrow E$ est contenu dans un sous-fibré F de E et que p_* est génériquement un isomorphisme (au dessus d'un ouvert U).

Cependant, la métrique de Hodge induit une métrique h sur le fibré F et les formules de Griffiths et Schmid pour la courbure de $\mathcal{D}$ montrent que les courbures bissectionnelles holomorphes sont semi-négatives en restriction à $p_*T_{Y^*}$ [Eys04, Corollaire 9.2.2]. La courbure décroissant dans les sous-fibrés, nous en déduisons que (F, h) est semi-négatif au sens de Griffiths ; en particulier $\mathrm{Tr}(i\Theta_h(F)) \leq 0$. D'autre part, la courbure sectionnelle holomorphe étant négative dans les directions horizontales, pour tout $y \in U$ et $\alpha \in T_{Y^*,y}$ $(\alpha \neq 0)$, le vecteur $v = p_*(\alpha)$ satisfait $i\Theta_{\alpha\bar{\alpha}v\bar{v}} < 0$ et donc $\mathrm{Tr}(i\Theta_h(F))_y < 0$.

En particulier, le fibré en droites $\det(F^*)$ est *big* (et *nef*). Or, par construction, le fibré canonique de Y^* se décompose en $K_{Y^*} = \det(F^*) + D$ où D est un diviseur de Cartier effectif ; il s'ensuit que Y^* est bien de type général. □

Remarque 3.6. *On pourra consulter également* [BKT12] *où des arguments similaires sont utilisés pour la construction de différentielles symétriques holomorphes non triviales.*

[3] par $\mathbb{C}$-VSH sur une variété normale, nous entendons un système local polarisé muni d'une filtration holomorphe vérifiant la décomposition de Hodge et la transversalité de Griffiths sur le lieu lisse.

3.4. **Cas semi-simple.** Dans le cas des représentations linéaires réductives définies sur un corps local, Katzarkov et Zuo ont développé de façon indépendante [Kat97b, Zuo96, Zuo99] une notion de revêtement spectral en utilisant la théorie des applications harmoniques à valeurs dans les immeubles de Bruhat-Tits [GS92]. L'exploitation de ces idées est poussée plus avant dans [Eys04], voir également [Eys11]. Nous résumons les résultats de [Eys11, Prop. 3.4.15, Lem. 4.2.3] dont nous ferons usage sous la forme suivante.

Lemme 3.7.
Soit X une variété kählérienne compacte, L un corps de nombres et $\wp$ un idéal premier de l'anneau des entiers de L. Si $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(L_\wp)$ désigne une représentation réductive, il existe une fibration holomorphe

$$s_\rho : X \longrightarrow S_\rho(X)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $S_\rho(X)$ est une espace kählérien normal (projectif si X l'est),

(2) si $Z \subset X$ désigne un sous-espace connexe de X, $s_\rho(Z)$ est un point si et seulement si $\rho(\pi_1(Z))$ est contenu dans un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_N(L_\wp)$.

Si T désigne une variété algébrique irréductible définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et si $r : T \dashrightarrow M_B(X, \mathrm{GL}_N)$ est une application rationnelle (définie elle aussi sur $\bar{\mathbb{Q}}$), considérons $\rho_T : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\bar{\mathbb{Q}}(T))$ une représentation réductive définie sur le corps des fractions de T dont la classe de conjugaison corresponde au point générique de l'image de r. Il existe alors une fibration holomorphe

$$s_T : X \longrightarrow S_T(X)$$

qui satisfait de plus :

(i) $S_T(X)$ est une espace kählérien normal (projectif si X l'est),

(ii) si $Z \subset X$ désigne un sous-espace connexe de X, $s_T(Z)$ est un point si et seulement si l'application $T \dashrightarrow M_B(Z, \mathrm{GL}_N)$ est constante.

Remarque 3.8. *Il est à noter que les constructions effectuées dans* [Eys04] *montrent que les fibrations s_ρ et s_T sont obtenues comme factorisation de Stein d'une application vers une variété de Kummer.*

Nous pouvons maintenant finir notre preuve alternative du résultat de factorisation de Zuo [Zuo96].

Théorème 3.9.
Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow S$ une représentation Zariski dense dans un groupe semi simple connexe S (défini sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle). Il existe $\pi : X' \longrightarrow X$ composition d'une modification propre et d'un revêtement étale fini, $f : X' \longrightarrow Y$ une fibration sur une variété projective

algébrique et $\rho_Y : \pi_1(Y) \longrightarrow S$ *une représentation (Zariski dense) telle que* $\pi^*\rho = f^*\rho_Y$.

Ceci implique que la base de la Γ-réduction de X est algébrique. [Zuo96] affirme de plus que Y est de type général, ce que nous obtiendrons plus loin.

Démonstration : Nous supposerons S défini sur un corps de nombres L. Il n'est pas restrictif de supposer que l'image de $\pi_1(X)$ par ρ est sans torsion. Si $g_\rho : X \longrightarrow Y$ désigne la Γ-réduction associée à ρ, la représentation ρ factorise par $\pi_1(Y)$ d'après le lemme 2.7. Considérons alors H le sous-groupe de $\pi_1(Y)$ normalement engendré par les images des morphismes $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(Y)$ induits par les applications holomorphes (avec Z lisse et connexe) vérifiant $\rho(\pi_1(Z)) = 1$. Par construction, la représentation ρ factorise par $\pi_1(Y)/H$, c'est à dire :

$$\rho \in Q := \mathrm{Im}\left(M_B(\pi_1(Y)/H, S) \longrightarrow M_B(Y, S)\right).$$

Notons au passage que Q est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et que les déformations de Simpson $([\rho_t])_{t\in\mathbb{C}^*}$ des éléments de Q sont également des éléments de Q.

Nous souhaitons factoriser toute la non rigidité de la représentation ρ. Pour cela, considérons tous les points $\sigma_\wp \in Q$ sur un corps local de la forme $L_\wp$ ainsi que les différentes composantes irréductibles $T_1, \dots, T_r$ de Q qui passe par $[\rho]$. Le lemme 3.7 fournit des applications holomorphes $s_{\sigma_\wp}$, s_{T_i} et nous noterons $f : Y \longrightarrow B$ la factorisation de Stein simultanée de toutes ces applications (un nombre fini d'entre elles suffit bien sûr à décrire f). Si $i : F \hookrightarrow Y$ désigne la fibre générale de f, la classe de conjugaison de la restriction de σ à $\pi_1(F)$ est indépendante de $[\sigma] \in Q$ (avec σ réductive). En particulier, la restriction de ρ à $\pi_1(F)$ est conjuguée à une représentation définie sur un corps de nombres $L' \supset L$; ses déformations de Simpson étant constantes, ρ_F est sous-jacente à une $\mathbb{C}$-VSH. Enfin, pour tout place non archimédienne $\wp$ de L', $\rho_\wp : \pi_1(F) \longrightarrow S(L'_\wp)$ a une image précompacte, ce qui signifie exactement que la monodromie de ρ_F est discrète.

Nous pouvons ainsi appliquer le lemme 3.5 : ρ_F a un morphisme de Shafarevich $F \longrightarrow Sh_{\rho_F}(F)$ dont la base est de type général. Par définition, la fibre générale de $F \longrightarrow Sh_{\rho_F}(F)$ a une image triviale par ρ ; mais Y étant elle-même déjà la base de la Γ-réduction attachée à ρ, cela signifie exactement que la fibre générale de $F \longrightarrow Sh_{\rho_F}(F)$ est un point et donc que F est de type général. L'application f est donc une fibration obtenue comme factorisation de Stein d'une application vers une variété de Kummer et sa fibre générale est de type général. Le théorème 3.1 montre alors qu'il existe une application génériquement finie $r : Y' \longrightarrow Y$ et une fibration en tores $g : Y' \longrightarrow Z$ sur une variété de type général Z.

L'image de $r_* : \pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Y)$ étant d'indice fini, la représentation $r^*\rho : \pi_1(Y') \longrightarrow S$ est encore Zariski dense, puisque S est connexe.

D'autre part, pour $z \in Z$ général, la fibre $Y'_z = g^{-1}(z)$ est un tore et la clôture de Zariski de $r^*\rho(\pi_1(Y'_z))$ est donc un sous-groupe abélien (puisque $\pi_1(Y'_z)$ l'est) et *normal* de S (puisque $\mathrm{Im}\,(\pi_1(Y'_z) \longrightarrow \pi_1(Y'))$ l'est). Le groupe S étant supposé semisimple, $r^*\rho(\pi_1(Y'_z))$ est donc un groupe fini. La variété Z étant la base d'une Γ-réduction associée à ρ, nous en déduisons à nouveau que la fibre générale de g est un point et que Y' est de type général. □

3.5. **Cas général.** Les résultats précédents s'étendent naturellement aux représentations réductives des groupes kählériens. Nous allons constater qu'elles sont construites à partir des variétés projectives et des tores complexes.

Soit donc X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\bar{k})$ une représentation réductive définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. L'adhérence de Zariski de $\rho(\pi_1(X))$ est donc un groupe algébrique réductif dont la composante neutre est un sous-groupe d'indice fini. Le lemme suivant résulte donc de la description de la structure de ces groupes.

Lemme 3.10.
Il existe un revêtement étale fini $p_1 : X' \longrightarrow X$ tel que l'adhérence de Zariski de $G := \rho(\pi_1(X'))$ soit un groupe réductif connexe. Par conséquent, il existe une isogénie canonique

$$i : G \longrightarrow G^\sharp := G/[G,G] \times G/Z(G) \simeq (GL_1)^q \times S$$

où S est semi-simple et connexe.

Combiné avec les résultats de la partie précédente, ce lemme fournit la description suivante.

Théorème 3.11.
Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une modification d'un revêtement étale fini $\mu : X^\sharp \longrightarrow X$, une isogénie $i : G \longrightarrow G^\sharp$ comme en 3.10, une fibration $s : X^\sharp \longrightarrow Y$ sur une variété algébrique et une représentation réductive

$$\rho^\sharp : \pi_1(\mathrm{Alb}(X^\sharp) \times Y) \longrightarrow G^\sharp$$

tels que $i \circ \mu^*\rho = (\alpha_{X^\sharp} \times s)^*\rho^\sharp$ (où $\alpha_{X^\sharp} : X^\sharp \longrightarrow \mathrm{Alb}(X^\sharp)$ désigne l'application d'Albanese de $X^\sharp$).
Nous pouvons de plus imposer la condition

$$\rho^\sharp\left(\pi_1(\mathrm{Alb}(X^\sharp)) \times \{1\}\right) \cap \rho^\sharp\left(\{1\} \times \pi_1(Y)\right) = \{1\}\,.$$

Démonstration : Comme la partie abélienne de la représentation factorise nécessairement par l'application d'Albanese, il ne nous reste qu'à traiter la partie semisimple. Pour cela, appliquons le lemme 3.10 et considérons $\rho_s : \pi_1(X') \longrightarrow S$ la représentation obtenue en composant

ρ avec i puis en projetant sur S. Le théorème 3.9 fournit une fibration méromorphe $X'' \dashrightarrow Y_s$ sur un revêtement étale de X' avec Y_s algébrique. Si $X^\sharp \longrightarrow Y$ désigne un modèle lisse de la factorisation de Stein de $X'' \dashrightarrow Y_s$ (Y est donc bien une variété algébrique lisse), la représentation $\pi_1(X^\sharp) \longrightarrow S$ factorise par Y (si on suppose que l'image de $\pi_1(X^\sharp) \longrightarrow S$ est sans torsion, ce que nous ferons bien entendu) et cette fibration est bien celle recherchée. $\square$

3.6. **Ubiquité des variations de structure de Hodge.** Comme rappelé dans la partie 3.2, une des conséquences de la théorie de C. Simpson est le phénomène d'ubiquité des variations de structures de Hodge. V. Koziarz a ainsi fait remarquer aux auteurs que la démonstration de Simpson ne se transpose pas au cas kählérien. En effet, les arguments de [Sim92] reposent sur l'existence de $M_{Dol}(X, \mathrm{GL}_N)$ comme variété quasi-projective (si X est algébrique), cet espace de module étant construit par les techniques de la Théorie Géométrique des Invariants. Les arguments développés ci-dessus permettent cependant de ramener le cas kählérien au cas projectif.

Proposition 3.12.
Soit $[\rho] \in M_B(X, \mathrm{GL}_N)(\mathbb{C})$ *la classe de conjugaison d'une représentation réductive et soit* $(\mathcal{E}, \theta)$ *le fibré de Higgs polystable associé. Pour* $t \in \mathbb{C}^*$*, le fibré de Higgs polystable* $(\mathcal{E}, t\theta)$ *est associé à une (classe de conjugaison de) représentation réductive* $[\rho_t] \in M_B(X, \mathrm{GL}_N)(\mathbb{C})$*. La limite*

$$\lim_{t\to 0}[\rho_t] = [\rho_0]$$

existe dans $M_B(X, \mathrm{GL}_N)(\mathbb{C})$ *et est sous-jacente à une* $\mathbb{C}$-VSH.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.13.
Soit Γ *un groupe de type fini et* $\Gamma_0 \leq \Gamma$ *un sous-groupe d'indice fini de* Γ*. L'application de restriction*

$$\mathrm{Res} : M_B(\Gamma, \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})) \longrightarrow M_B(\Gamma_0, \mathrm{GL}_N(\mathbb{C}))$$

est propre (donc fini).

Démonstration : Si $\Gamma = \pi_1(X)$ où X est une variété kählérienne compacte, il s'agit d'une conséquence immédiate de [Sim92, Lemma 2.8]. Nous omettons l'argument dans le cas général puisque nous ne l'utiliserons pas. $\square$

Démonstration du théorème 3.12: Considérons tout d'abord l'application $\mu : X^\sharp \longrightarrow X$ et l'isogénie i fournies par le théorème 3.11; μ se décompose en une modification propre $b : X^\sharp \longrightarrow X'$ et un revêtement étale fini $p : X' \longrightarrow X$. De plus, $X^\sharp$ est l'espace total d'une fibration sur une variété algébrique lisse Y et la représentation ρ vérifie $i \circ \mu^*\rho = (\alpha_{X^\sharp} \times s)^*\rho^\sharp$ où $\rho^\sharp$ est une représentation de $\pi_1(\mathrm{Alb}(X^\sharp) \times Y)$ dans $G^\sharp$. En particulier $\rho^\sharp = \rho^\sharp_{ab}.\rho^\sharp_Y$ où $\rho^\sharp_{ab} = p^*_{\mathrm{Alb}(X^\sharp)}\rho^\sharp|_{\pi_1(\mathrm{Alb}(X^\sharp))}$ et $\rho^\sharp_Y = p^*_Y\rho^\sharp|_{\pi_1(Y)}$, ces deux représentations étant vues comme à valeurs dans deux sous groupes algébriques réductifs notés respectivement G_1 et G_2 qui de plus commutent entre eux. On a $[\rho^\sharp_t] = [\rho^\sharp_{ab,t}.\rho^\sharp_{Y,t}]$ où $\rho^\sharp_{ab,t}$ (resp. $\rho^\sharp_{Y,t}$) est un représentant de $[\rho^\sharp_{ab,t}]$ (resp. de $[\rho^\sharp_{Y,t}]$) à valeurs dans G_1 (resp. dans G_2). Comme Y est projective lisse, nous concluons de la continuité de p^*_Y et du théorème d'ubiquité pour Y que la limite quand $t \to 0$ de $[\rho^\sharp_{Y,t}]$ existe. L'énoncé est élémentaire pour les représentations abéliennes et donc pour $[\rho^\sharp_{ab,t}]$. Par suite la limite quand $t \to 0$ de $[\rho^\sharp_t]$ existe. Par image réciproque, la limite des déformations de Simpson de la représentation $i \circ \mu^*\rho$ (et donc $\mu^*\rho$ elle aussi[4]) existe quand $t \to 0$. Comme $\mu^*\rho = b^*p^*\rho$ et comme b_* est un isomorphisme entre les groupes fondamentaux, la conclusion reste valable pour $p^*\rho$. Nous pouvons finalement appliquer le lemme 3.13 pour constater que la limite $\lim_{t\to 0}[\rho_t]$ existe. Il est alors immédiat de vérifier que la classe d'isomorphisme du fibré de Higgs correspondant est fixée par l'action de $\mathbb{C}^*$ et les arguments de [Sim92, section 4] montrent qu'un tel fibré correspond à une $\mathbb{C}$-VSH. □

3.7. **Morphisme de Shafarevich.** Le théorème 3.11 et l'existence du morphisme de Shafarevich démontrée dans [Eys04] dans le cas projectif impliquent :

Proposition 3.14.
Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma = \rho(\pi_1(X)) < \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire. Si $\Gamma < \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est d'adhérence de Zariski réductive, alors le morphisme de Shafarevich associé à ρ existe.

Démonstration : L'existence du morphisme de Shafarevich est invariante par revêtement étale fini et modification biméromorphe. Par suite, on peut supposer que l'adhérence de Zariski de Γ est connexe et, en appliquant le théorème 3.11, on se réduit au cas où $X = X^\sharp$. On dispose alors d'une variété algébrique lisse Y et d'une fibration holomorphe $s : X \to Y$ telle que la représentation ρ factorise comme $(\alpha_X \times s)^*\rho^\sharp$ où $\rho^\sharp : \pi_1(\mathrm{Alb}(X) \times Y) \to \Gamma$ est une représentation. On note ρ_Y la restriction de $\rho^\sharp$ à $\pi_1(Y)$. Le morphisme de Shafarevich $sh_{\rho_Y} : Y \to Sh_{\rho_Y}(Y)$ associé à ρ_Y existe par [Eys04]. On note ρ^{ab} la restriction de $\rho^\sharp$ à $\pi_1(\mathrm{Alb}(X))$ et $sh_{\alpha^*_X\rho^{ab}} : X \to Sh_{\alpha^*_X\rho^{ab}}(X)$ le morphisme de Shafarevich correspondant dont la construction est donnée à l'exemple 2.6. On vérifie alors aisément que le morphisme de Shafarevich $X \to Sh_\rho(X)$ est la factorisation de Stein de $sh_{\rho^{ab}} \times (sh_{\rho_Y} \circ s)$.

[4]comme i est une isogénie, le morphisme $M_B(\tilde{X}, G) \longrightarrow M_B(\tilde{X}, G^\sharp)$ est fini.

□

4. Quotients résolubles linéaires des groupes kählériens

Nous étudions maintenant le cas d'un quotient linéaire *résoluble* $\pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ et établissons dans ce cas particulier les résultats énoncés dans l'introduction. Les outils de base sont la théorie de Hodge, l'application d'Albanese et la structure de Hodge mixte sur la complétion nilpotente de $\pi_1(X)$, due à R. Hain [Hai85, Hai87].

4.1. Morphisme d'Albanese.

Proposition 4.1.
Supposons Γ résoluble (non nécessairement linéaire). Alors :

(1) Si Γ n'est pas virtuellement nilpotent, il existe (à revêtement étale fini près) une application holomorphe surjective $f : X \to C$ sur une courbe projective de genre $g \geq 2$ qui factorise ρ.

(2) Si Γ n'est pas virtuellement abélien, il existe une application holomorphe $f : X \to Y$, où Y est une sous-variété de type général de dimension strictement positive d'une variété abélienne (quotient de $Alb(X)$).

Démonstration : L'assertion 1 est établie (à l'aide de l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel) par T. Delzant dans [Del10]. Le cas où Γ est linéaire avait été traité (sans cet invariant) dans [Cam01], basé sur les travaux classiques de Green-Lazarsfeld, Beauville, Simpson, Arapura-Nori. L'assertion 2 (qui traite donc le cas où Γ est virtuellement nilpotent) résulte de [Cam95]. □

Corollaire 4.2.
S'il n'existe pas de revêtement étale fini de X admettant une application méromorphe surjective sur une variété de type général non-triviale, les quotients résolubles de $\pi_1(X)$ sont tous virtuellement abéliens.

Remarque 4.3. *1. L'hypothèse du corollaire équivaut à : l'application d'Albanese de tout revêtement étale fini de X est surjective et connexe.*

2. Une variété spéciale au sens de [Cam04]*) satisfait cette hypothèse.*

4.2. Morphisme de Shafarevich.

Théorème 4.4.
Soit $\rho : \pi_1(X) \to R$ un quotient résoluble linéaire. Alors le morphisme de Shafarevich $sh_\rho : X \to Sh_\rho(X)$ existe. Sur un revêtement étale fini adéquat de X, il coincide avec la factorisation de Stein de l'application composée $q \circ \alpha_X : X \to A_\rho$, où $\alpha_X : X \to Alb(X)$ est le morphisme d'Albanese, et $q : Alb(X) \to A_X$ est le quotient par le plus

grand des sous-tores compexes T de $Alb(X)$ tels que $\pi_1(T) \subset K := Ker(H_1(X,\mathbb{Z}) \to R^{ab})$.

Remarque 4.5. *La démonstration qui suit ne permet pas d'aborder le cas résoluble non linéaire.*

Démonstration : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer Γ et Γ^{ab} sans torsion. Considérons en effet la factorisation de Stein $g_\rho : X \to Y_\rho$ du morphisme $q \circ \alpha_X : X \to A_\rho$. Soit $f : Z \to X$ holomorphe, Z compact connexe possiblement singulier et même non irréductible. Si $\rho \circ f_*(\pi_1(Z))$ est fini, alors il en est de même de $\rho^{ab} \circ f_*(\pi_1(Z))$, et $g_\rho \circ f(Z)$ est bien un point, puisque g_ρ est le morphisme de Shafarevich de ρ^{ab}. Si $g_\rho \circ f(Z)$ est un point, alors $\rho^{ab}(f_*(\pi_1(Z)))$ est fini donc trivial. En particulier, $\rho(f_*(\pi_1(Z))) < N$, si $N := D\Gamma < \Gamma$ est le groupe dérivé de Γ, qui est nilpotent. Du lemme 4.6 ci-dessous, appliqué à la composée : $q_\rho \circ \alpha_X \circ f : Z \to A_\rho$, nous déduisons que l'image de $\pi_1(Z)$ dans N, et donc dans Γ, est finie, ce qui établit que g_ρ est le morphisme de Shafarevich de ρ. $\square$

Lemme 4.6.
Soit Y une variété Kählérienne compacte connexe et Z un espace complexe compact kählérien connexe, possiblement non normal et non irréductible. Soit $f : Z \to Y$ une application holomorphe. Si l'application induite $f_* : H_1(Z,\mathbb{Q}) \to H_1(Y,\mathbb{Q})$ est nulle, alors, pour tout $k \geq 0$, $f_*(\pi_1(Z)/C^{k+1}\pi_1(Z))$ est fini, en notant $C^{k+1}G$ le k-ième terme de la suite centrale descendante d'un groupe G, définie par : $C^{k+1}G := [G, C^kG], C^0G := G$.

Démonstration : Il s'agit de [Cam98, cor. 5.2] si Z est lisse. Le cas où Z est normale en découle. Le cas général, dû dans le cas projectif à Katzarkov [Kat97a] et à S. Leroy dans le cas kählérien (voir [Cla08]) résulte de [EKPR12, Proposition 3.6, Remark 3.8] appliquée avec M la représentation triviale et $G = GL(1)$. $\square$

4.3. **Convexité holomorphe : cas linéaire résoluble géométrique.** Le cas linéaire résoluble se ramenant essentiellement au cas abélien, nous en déduisons l'énoncé de convexité holomorphe suivant.

Corollaire 4.7.
Soit $\rho : \pi_1(X) \to R$ un quotient résoluble linéaire. Supposons que $\rho^{ab}(\pi_1(X))$ soit un quotient abélien géométrique. Alors, le revêtement $\widetilde{X}_\rho$ est holomorphiquement convexe.

Démonstration : Il résulte du corollaire 4.4 que l'application holomorphe naturelle $R(\widetilde{X_\rho}) \to R(\widetilde{X_{\rho^{ab}}})$ est un revêtement topologique. Comme tout revêtement d'un espace de Stein est de Stein, l'exemple

2.16 permet de conclure. □

5. Convexité holomorphe des revêtements linéaires des variétés kählériennes compactes

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes sur ρ garantissant la convexité holomorphe de $\widetilde{X}_\rho$.

5.1. Revêtements réductifs des variétés kähériennes compactes.

Les résultats de [Eys04] fournissent des conditions suffisantes de convexité holomorphe pour les revêtements réductifs des variétés projectives lisses et ce en terme de sous-ensembles constructibles absolus de $M_B(X, G)$ (avec G un groupe réductif sur $\bar{\mathbb{Q}}$). La généralisation de cette notion au cadre kählérien n'est *a priori* pas évidente : celle-ci doit être fonctorielle pour les applications holomorphes entre variétés kählériennes compactes et pour les morphismes entre groupes réductifs (voir remarque 3.3). Dans le cas abélien ($G = \mathrm{GL}_1$), les ensembles constructibles absolus doivent correspondre à des translatés de sous-tores par des points de torsion [Sim93, Cam01].

Avant de formuler une définition prenant en compte ces différentes exigences, fixons quelques notations. Considérons pour cela T un tore complexe, Y une variété projective lisse et $G/\bar{\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique réductif dont nous noterons $Z = Z(G)^\circ$ la composante neutre du centre. Si ρ_T (resp. ρ_Y) désigne une représentation du groupe fondamental de T (resp. de Y) à valeurs dans Z (resp. dans G), le produit :

$$\rho_T \cdot \rho_Y(\gamma_T, \gamma_Y) = \rho_T(\gamma_T)\rho_Y(\gamma_Y)$$

définit bien une représentation de $\pi_1(T \times Y)$ à valeurs dans G. Après passage au quotient, nous obtenons un morphisme entre variétés des caractères :

$$\begin{aligned} M_B(T, Z) \times M_B(Y, G) &\longrightarrow M_B(T \times Y, G) \\ ([\rho_T], [\rho_Y]) &\longmapsto [\rho_T \cdot \rho_Y] = [\rho_Y] \cdot [\rho_Y] \end{aligned}$$

Pour finir, remarquons les points suivants : $M_B(T, Z)$ s'identifie au groupe algébrique $Z^{2\dim(T)}$ et le morphisme ci-dessus définit une action algébrique ; d'autre part, $M_B(Y, G)$ s'identifie au fermé $p_Y^* M_B(T \times Y, G)$ des représentations triviales en restriction à $\pi_1(T)$.

Définition 5.1.
Soit X une variété kählérienne compacte et G un groupe algébrique linéaire réductif défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

Un ensemble constructible $M \subset M_B(X, G)(\bar{\mathbb{Q}})$ est dit constructible absolu *si pour toute composante irréductible $\bar{M}$ de son adhérence de Zariski, il existe un revêtement étale $p : X' \longrightarrow X$, une application méromorphe $s : X' \longrightarrow T \times Y$ (avec T un tore complexe et Y une* *variété algébrique), un groupe algébrique réductif connexe $H \subset G$ et une isogénie $i : H \longrightarrow H^\sharp$ tels que :*

(1) *$p^*\bar{M} = j_*\bar{M}'$ où $j : H \longrightarrow G$ est l'inclusion et $\bar{M}'$ un fermé de Zariski de $M_B(X', H)$,*
(2) *$i_*\bar{M}' = s^*\bar{N}$ où $N \subset M_B(T \times Y, H^\sharp)$,*
(3) *$N = M_B(T, Z(H^\sharp)^\circ) \cdot N_Y$ où $N_Y \subset M_B(Y, H^\sharp)$ est constructible absolu dans le sens de* [Sim93].

Notons que j_* étant un morphisme fini, il est en particulier fermé.

Lemme 5.2.
Si X est algébrique, un ensemble constructible absolu dans le sens de [Sim93] *est un précisément un ensemble constructible absolu dans le sens de la définition 5.1.*

Démonstration : L'implication directe est évidente en prenant pour T un point, $Y = X$ et $p = s = \mathrm{id}_X$.

Réciproquement, si X est algébrique, le tore T peut être choisi algébrique et $M_B(T, Z(H^\sharp)^\circ) \cdot N_Y$ est alors constructible absolu au sens de Simpson (comme on le constate aisément). En particulier, $i_*\bar{M}'$ est constructible absolu au sens de Simpson. Le morphisme i_* étant fini sur son image, $\bar{M}'$ est une composante irréductible de $(i_*)^{-1}(i_*(\bar{M}'))$ et donc constructible absolu au sens de Simpson. A nouveau, p^* étant finie sur image (lemme 3.13), le même argument montre que $\bar{M}$ est constructible absolu au sens de [Sim93]. □

Lemme 5.3.
Si X est une variété kählérienne compacte, $M_B(X, G)$ et ses composantes irréductibles sont constructibles absolus.

Démonstration : Soit M une composante irréductible de $M_B(X, G)$ et $[\rho]$ un point générique de M. La représentation ρ est alors conjuguée à une représentation Zariski dense ρ_H à valeurs dans $H(\bar{k})$ où $\bar{k}$ est un corps algébriquement clos de degré de transcendance fini sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et $H \subset G$ est un $\bar{\mathbb{Q}}$-sous-groupe. Nous pouvons alors appliquer le théorème 3.11 à ρ_H. Prenons pour N_Y la composante de $M_B(Y, H^\sharp)$ qui contient la restriction de $\rho_H^\sharp$ à $\pi_1(Y)$; de plus, quitte à considérer un revêtement étale fini de T (et donc un revêtement étale fini de X'), nous pouvons supposer que $\rho^\sharp_{H|\pi_1(T)}$ est à valeurs dans $Z(H^\sharp)^\circ$. Les conditions de la définition 5.1 sont alors satisfaites, en remarquant que $M_B(T, Z(H^\sharp)^\circ) \subset i_* M_B(T, Z(H)^\circ)$. □

Le lemme suivant n'a pas été explicité dans [Eys04].

Lemme 5.4.
Soit X une variété kählérienne compacte et $M \subset M_B(X, G)(\bar{\mathbb{Q}})$ constructible. Si $[\rho_1], \ldots, [\rho_k]$ désignent les points génériques des composantes

irréductibles de $\bar{M}$, alors le sous-groupe normal $H_M \lhd \pi_1(X)$ défini par :

$$H_M := \bigcap_{[\rho]\in M} \mathrm{Ker}(\rho)$$

vérifie

$$H_M = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\rho_i).$$

Démonstration : Cet énoncé n'est pas spécifique aux groupes kähleriens. Plus généralement, on obtient immédiatement son analogue pour la variété des caractères de n'importe quel groupe de type fini Γ à valeurs dans GL_N en utilisant que les fonctions $\{\rho \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(\gamma))\}_{\gamma\in\Gamma}$ engendrent l'anneau des fonctions de $M_B(\Gamma, GL_N)$ et la description de ses points sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On se ramène immédiatement à $G = GL_N$. $\square$

En particulier H_M apparait comme le noyau d'une représentation linéaire réductive $\bar{\rho} = \oplus\rho_i$ à valeurs dans un corps de caractéristique nulle de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, donc aussi d'une représentation linéaire réductive sur $\mathbb{C}$.

Nous pouvons maintenant conclure quant à la convexité holomorphe du revêtement obtenu en considérant toute une famille (constructible absolu) de représentations réductives.

Théorème 5.5.
Soit X une variété kählérienne compacte et $M \subset M_B(X, G)(\bar{\mathbb{Q}})$ constructible absolu. Le revêtement

$$\widetilde{X_M} := H_M \backslash \widetilde{X}^u$$

est alors holomorphiquement convexe.

Remarque 5.6. *S'il existe une représentation complexe d'adhérence de Zariski semisimple telle que $\widetilde{X_\rho}$ n'est pas holomorphiquement convexe est à notre connaissance une question ouverte.*

Démonstration : Nous remontons pas à pas le cours de la définition 5.1. Si X est projective, il s'agit de l'énoncé de [Eys04, Théorème 3]. Si $X = T \times Y$ et $M = N = M_B(T, Z(H^\sharp)^\circ) \cdot N_Y$, le revêtement correspondant à M est :

$$\widetilde{X_M} = \widetilde{T^u} \times \widetilde{Y_{N_Y}}$$

et est donc holomorphiquement convexe comme produit d'un espace affine par une variété holomorphiquement convexe. Si $X = X'$ et si $M = s^*N$ (notations de la définition 5.1), $\widetilde{X'_M}$ est alors propre sur $\widetilde{T^u} \times \widetilde{Y_{N_Y}}$. Examinons l'effet d'une isogénie et supposons que $X = X'$ et $M = M'$. Les sous-groupes définies par M' et i_*M' vérifient

$$H_{M'} \lhd H_{i_*M'} \lhd \pi_1(X)$$

et le lemme 5.4 montre que l'indice de $H_{M'}$ dans $H_{i_*M'}$ est alors fini (majoré par $\deg(i)^k$) et donc que

$$\widetilde{X'_{M'}} \longrightarrow \widetilde{X'_{i_*M'}}$$

est un revêtement étale fini. Enfin, remarquons que

$$\widetilde{X'_{M'}} \longrightarrow \widetilde{X_M}$$

est propre. Tout ceci montre bien la convexité holomorphe de $\widetilde{X_M}$. □

5.2. **Revêtements linéaires.**

Théorème 5.7.
Soit X une variété kählérienne compacte, G un groupe algébrique linéaire réductif défini sur $\mathbb{Q}$ et $M = M_B(X,G)$ la variété des caractères associée. Considérons alors $\widetilde{H^\infty_M}$ le sous-groupe de $\pi_1(X)$ défini comme l'intersection des noyaux de toutes *les représentations $\pi_1(X) \longrightarrow G(A)$ où A est une $\mathbb{C}$-algèbre arbitraire. Le revêtement galoisien de groupe $\pi_1(X)/\widetilde{H^\infty_M}$*

$$\widetilde{X^\infty_M} := \widetilde{H^\infty_M} \backslash \widetilde{X^u}$$

est alors holomorphiquement convexe.

Remarque 5.8. *On a $\widetilde{H^\infty_M} = \mathrm{Ker}(\rho^{taut}_A)$ où A est l'anneau des fonctions régulières sur $R_B(\pi_1(X),G)$ et $\rho^{taut} : \pi_1(X) \to G(A)$ est la représentation tautologique.*

Corollaire 5.9.
Si X est une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental est linéaire, son revêtement universel $\widetilde{X^u}$ est holomorphiquement convexe.

Démonstration du théorème 5.7: La preuve donnée dans le cas projectif [EKPR12] s'applique modulo l'adaptation du lemme 5.1 de cette référence au cas kählérien. Cette adaptation est aisée, voir [Eys13]. □

6. Structure des variétés de Shafarevich

L'objectif de cette section est de démontrer un théorème de structure pour la variété de Shafarevich associée à une représentation linéaire ρ en combinant les énoncés similaires dans les cas particuliers antithétiques et complémentaires où Γ est (d'adhérence de Zariski) semi-simple d'une part, résoluble d'autre part (La réduction du cas général à ces deux cas particuliers résultant de la décomposition de Levi-Malčev).

6.1. **Variétés de Shafarevich semisimples.** Nous donnons ici notre démonstration alternative de la dernière partie du théorème principal de [Zuo96] en montrant que la base du morphisme de Shafarevich d'une représentation semi-simple est de type général. Pour cela, nous allons utiliser une construction élaborée dans [Eys04, §5.3], celle du I-morphisme de Shafarevich. Rappelons en brièvement les grandes lignes : si M est un sous-ensemble constructible absolu de $M_B(X, G)(\bar{\mathbb{Q}})$ (avec G un groupe réductif et X projective lisse), il est possible de lui associer

$$sh^I_M : X \to sh^I_M(X)$$

qui est obtenu comme factorisation de Stein d'un morphisme vers une certaine variété de Kummer comme dans la preuve du théorème 3.9. Plus précisément, il s'agit de la réduction de Katzarkov-Zuo associée à un produit de représentations de $\pi_1(X)$ vers les points de G sur divers corps locaux auquelles on peut attacher une application harmonique équivariante $h_M : \widetilde{X_M} \to \Delta$ où Δ un produit d'immeubles de Bruhat-Tits. Par [Eys04, Prop 5.4.6], le feuilletage défini par le noyau de la différentielle complexifiée de h_M coincide avec celui qu'induit la fibration sh^I_M. En particulier son corang[5] au point général est $r := \dim(sh^I_M(X))$. Cet énoncé permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 6.1.
Soit X une variété kählérienne compacte et $M \subset M_B(X, G)(\bar{\mathbb{Q}})$ constructible absolu. Soit

$$\widetilde{X_M} := H_M \backslash \widetilde{X^u} \to \widetilde{S_M(X)}$$

la réduction de Remmert de Stein, $\Gamma_M = \pi_1(X)/H_M$ et $X \to sh_M(X) = \Gamma_M \backslash \widetilde{S_M(X)}$ le morphisme de Shafarevich.

Si Γ_M est sans torsion et si les points génériques des composantes connexes de M sont des caractères de représentations d'adhérence de Zariski semi simple, $sh_M(X)$ est de type général.

Si $\kappa(sh_M(X)) = 0$, ces représentations génériques sont d'image finie et Γ_M est fini.

Démonstration : Nous pouvons supposer que M est irréductible, que sh_M est biméromorphe (quitte à remplacer X par la base du morphisme de Shafarevich correspondant) et que G presque simple. Le théorème 3.9 nous réduit alors au cas où X est projectif.

Pour montrer le résultat annoncé, il nous suffit d'établir les deux points suivants :

[5] L'argument de [Zuo96] repose sur l'énoncé plus fort que cette propriété est satisfaite par la factorisation de Katzarkov-Zuo d'une représentation Zariski dense dans un corps local non archimédien et en dernière analyse sur [Zuo99, Theorem 4.2.3]. Une difficulté dans l'argument de [Zuo99, p. 72] a conduit [Eys04] a en donner la présente version affaiblie et a motivé le développement de notre approche alternative à [Zuo96].

(I) la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle[6] : $\kappa(X) \geq 0$.

(II) si $\kappa(X) = 0$, la représentation correspondant au point générique de M est d'image finie.

Voyons tout d'abord comment ceci permet de conclure que X est de type général. Si $\kappa(X) \geq 0$, il nous suffit de montrer que les fibres générales de la fibration d'Iitaka de X sont des points. Si F désigne une telle fibre, elle vérifie par définition $\kappa(F) = 0$ et son image dans G est un sous-groupe normal (car F est la fibre générale d'une application holomorphe). Comme G est presque simple, le deuxième point ci-dessus nous assure que l'image de $\pi_1(F)$ dans G est finie. Comme nous avons supposé que $X = sh_M(X)$, cela implique que F est réduit à un point et X est bien de type général.

Pour établir les points ci-dessus, utilisons une construction de [Eys04, Paragraphe 1.3.4]. Si β est une forme r-linéaire alternée complexe sur l'appartement de Δ, la quantité $< \prod_{w\in W} w^*\beta, \Lambda^r \partial h_M >$ définit un tenseur holomorphe $\tau \in H^0(X, S^N\Omega^r_X)$ qui est non nul si β est choisie génériquement.

Par construction τ est induit par une forme pluricanonique holomorphe τ^I définie sur un ouvert $U \subset sh^I_M(X)$. En choisissant une multisection de sh^I_M nous voyons qu'il existe une application holomorphe $\psi : X' \to sh^I_M(X)$, X' étant projective lisse, telle que $\psi^*\tau^I$ se prolonge à une forme pluricanonique régulière sur X'. Ceci signifie précisément que τ^I est une forme pluricanonique sur la base orbifolde de sh^I_M [Cam04], c'est-à-dire $\kappa\left(sh^I_M(X), \Delta(sh^I_M)\right) \geq 0$. Remarquons également que les fibres F de sh^I_M sont de type général (par construction elles ont une application de périodes génériquement immersive, comme dans la démonstration du théorème 3.9). Le point (I) :

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa\left(sh^I_M(X), \Delta(sh^I_M)\right) \geq 0.$$

résulte alors de la variante orbifolde de [Kol87] :

Lemme 6.2.
Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une fibration rationnelle de variétés projectives complexes dont la fibre générale fibre est de type général. Alors, $\kappa(X) \geq \dim(X_y) + \kappa(Y, f)$ où $\kappa(Y, f) = \kappa(Y, \Delta(\hat{f}))$ et $\hat{f}$ désigne un modèle net préparé et admissible de f (voir [Cam04, Section 1.3]*).*

Démonstration : Il s'agit de reprendre les arguments de [Vie83, Kol87] en y incorporant les considérations développées dans [Cam04]. En effet, les arguments de [Vie83, §7] montrent qu'il suffit de traiter le cas d'une fibration dont la variation est maximale, une fois que l'on y a remplacé le théorème III par le résultat de semi-positivité orbifolde [Cam04, Th.

[6]Notons que ce point résulterait de la conjecture d'abondance.

4.11]. Si f est à variation maximale, il nous faut alors établir l'égalité :

$$\kappa\left(Y, \det f_*(mK_{X/(Y,\Delta(f))})\right) = \dim(Y) \tag{1}$$

pour $m >> 1$ (toujours d'après les arguments de Viehweg). En fait, dans cette situation, le faisceau $f_*(mK_{X/(Y,\Delta(f))})$ est lui même *big* [7] pour m assez grand. En effet, d'après [Cam04, Prop. 4.15], il existe un changement de base (avec v) fini

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & Y' \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

et une injection de faisceau

$$g_*(mK_{X'/Y'}) \hookrightarrow v^* f_*(mK_{X/(Y,\Delta(f))} + B)$$

(avec B un diviseur sur X qui est f-exceptionnel et qui ne perturbe donc pas les espaces de sections globales puisque f est supposée nette). Or, le résultat principal de [Kol87] établit le caractère *big* du faisceau $g_*(mK_{X'/Y'})$ pour m assez grand ; les faisceaux considérés étant de même rang, nous en déduisons que $v^* f_*(mK_{X/(Y,\Delta(f))} + B)$ ainsi que $f_*(mK_{X/(Y,\Delta(f))})$ sont également *big* et que l'égalité (1) est bien vérifiée. $\square$

Pour le point (II), nous reprendrons essentiellement les arguments de [Zuo96]. On suppose maintenant $\kappa(X) = 0$. Le raisonnement mené ci-dessus montre que dans ce cas sh^I_M est une application birationnelle et le noyau de la différentielle complexifiée de $h_M : \tilde{X} \longrightarrow \Delta_M$ est trivial au point général de $\tilde{X}$.

Dans ce cas, la construction ci-dessus fournit une forme pluricanonique qui s'annule sur le diviseur de ramification R du revêtement spectral X^s_M associé à M (voir [Zuo96, Eys04]) et nous en déduisons l'égalité : $\kappa(X^s_M) = \kappa(X) = 0$. En effet, prenant un modèle lisse Y de X^s_M dont tous les diviseurs exceptionnels s'envoient sur R et désignant par $\sigma : Y \to X$ l'application naturelle, nous avons $K_Y = \sigma^* K_X + \sum_i a_i E_i + \sum_j b_j F_j$ où les E_i sont exceptionnels et les F_j sont finis sur les composantes de R et $a_i, b_j > 0$. L'annulation de la forme pluricanonique exactement sur R fournit l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ tels que $\alpha R \leq K_X \leq \beta R$ (donc la dimension d'Iitaka [Uen75] de (R, X) est nulle). Il existe donc $\alpha', \beta' \in \mathbb{Q}_{>0}$ tels que $\alpha' \sigma^* R \leq K_Y \leq \beta' \sigma^* R$. Comme la dimension d'Iitaka de $(\sigma^* R, Y)$ est égale à celle de (R, X) par [Uen75, Theorem 5.13], on conclut bien que $\kappa(Y) = 0$.

D'autre part, le revêtement spectral vient également avec une application vers une variété abélienne $\alpha_M : X^s_M \longrightarrow \mathrm{Alb}_M$; comme celle-ci

[7] nous renvoyons à [Vie83] pour les notions de faible positivité et de *bigness*.

provient essentiellement de l'application pluriharmonique h_M, l'hypothèse sur le noyau de la différentielle de h_M montre que α_M est génériquement finie. Les résultats de [Kaw81] montrent que X_M^s est alors birationnelle à une variété abélienne. Cette dernière remarque entraîne que l'image de la représentation correspondant au point générique de M est virtuellement abélienne : elle est donc finie d'après [Sim93]. $\square$

Nous retrouvons ainsi le dernier point du théorème principal de [Zuo96].

Théorème 6.3.
Si $\Gamma < \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est d'adhérence de Zariski semi-simple et Γ sans torsion, $Sh_\rho(X)$ est une variété de type général.

Démonstration : Si M le plus petit fermé constructible absolu de $M_B(X, \bar{\Gamma})$ contenant ρ, M est irréducible. Considérons ρ_M un représentant de son point générique. Puisque $\mathrm{Ker}(\rho_M) < \mathrm{Ker}(\rho)$, on a un morphisme $\tau : Sh_M(X) = Sh_{\rho_M}(X) \to Sh_\rho(X)$. Soit $i : Z \to X$ la fibre générale de $X \to Sh_{\rho(X)}$ de sorte que $i^*\rho$ est la représentation triviale (en particulier, Z est lisse). La classe de conjugaison $[\mathbb{1}]$ de la représentation triviale est fermée absolue dans $M_B(Z, \bar{\Gamma})$, $M \subset (i^*)^{-1}[\mathbb{1}]$ ce qui signifie que $\rho_M(\pi_1(Z)) = \{1\}$. Donc Z est contractée dans $Sh_M(X)$ ce qui implique que τ est biméromorphe. Le lemme 6.1 permet alors de conclure. $\square$

Remarque 6.4. *Dans ce raisonnement, on peut prendre pour Z un revêtement étale de la résolution des singularités d'une composante d'une fibre de τ. Il en résulte que τ est un isomorphisme. Néanmoins, nous ignorons s'il est possible que $\widetilde{X_\rho}$ ne soit pas holomorphiquement convexe, c'est à dire que $R(\widetilde{X_\rho})$ soit de Stein. Ce que nous obtenons est que $R(\widetilde{X_{\rho_M}}) \to R(\widetilde{X_\rho})$ est un revêtement topologique par un espace de Stein.*

6.2. **Cas linéaire général.** Nous considérons maintenant le cas général $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma < \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Nous noterons $G := \overline{\Gamma}$ l'adhérence de Zariski de Γ. Quitte à remplacer X par un revêtement étale fini adéquat, nous supposerons que les groupes algébriques intervenant dans la suite sont connexes et que les représentations linéaires déduites de ρ, de ses quotients ou sous-représentations se factorisent par les Γ-réductions associées.

Soit donc $\bar{R}$ le radical résoluble de G et $\lambda : G \to S := G/R$ son quotient semi-simple. Par Levi-Malčev, G est produit semi-direct de S par $\bar{R}$. Nous désignerons par $R := \Gamma \cap \bar{R}$, et $s : \Gamma \to \Gamma/R$ le quotient naturel déduit de λ. Donc R est résoluble, et $\sigma := s \circ \rho : \pi_1(X) \to \Gamma/R$ est semi-simple.

Nous avons donc (par le lemme 2.10) des réductions $g_\rho : X \to G_\rho(X)$ et $g_\sigma : X \to G_\sigma(X)$ associées à ρ et σ et une factorisation $g_{\rho/\sigma}$:

$G_\rho(X) \to G_\sigma(X)$ telle que $g_\sigma = g_{\rho/\sigma} \circ g_\rho$. La restriction de g_ρ à la fibre générique X_σ de g_σ n'est autre que la R-réduction de g_{ρ_σ}. En effet (voir lemme 2.10), la restriction, notée ρ_σ, de ρ à $\pi_1(X_\sigma)$ a pour image R.

En combinant le théorème 3.14 avec le corollaire 4.4, nous pouvons établir le :

Théorème 6.5.
Soit $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma < \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ comme ci-dessus. Alors (quitte à remplacer X par une modification propre d'un revêtement étale fini adéquat), la variété $Sh_\rho(X)$ est biméromorphe à l'espace total d'une fibration lisse $\tau : Sh_\rho(X) \to S_\rho(X)$ en tores complexes sur une variété algébrique $S_\rho(X)$ de type général.

Démonstration : Notons $Sh_\sigma(X) := Z$. Posons $H = R/[R,R]$, $\rho' : \pi_1(X) \to \Gamma/[R,R]$ et appliquons le lemme 2.12. La ρ'-réduction $sh_{\rho'} : X \to Sh_\rho(X) := Y$ est biméromorphe à la factorisation de Stein d'un $q_\rho \circ \alpha_{X/Z} : X \to A_\rho(X/Z) := A_\rho$, où $\tau : A_\rho(X/Z) \to Z$ est une fibration presque holomorphe dont les fibres générales sont des tores complexes. Il résulte du lemme 2.10 et du théorème 4.4 que cette ρ' réduction est la ρ-réduction de X.

Nous avons, pour $z \in Z$ général une application de Ueno-Kawamata unique : $u_z : Y_z \to W_z$, qui est un fibré principal de groupe K_z, un revêtement étale fini d'un sous-tore de $A_\rho(X/Z)_z$, avec W_z de type général. Par la compacité des composantes irréductibles de l'espace des cycles de Chow-Barlet de Y, nous en déduisons l'existence d'une application presque-holomorphe $u : Y \to W$ au-dessus de Z, holomorphe au-dessus de l'ouvert de lissité de $sh_\sigma : X \to Z$, et dont la restriction à Y_z coïncide avec $u_z : Y_z \to W_z$, fibre de W au-dessus de z. Nous avons alors une application d'Albanese relative naturelle : $\alpha_u : \mathrm{Alb}(Y/Z) \to \mathrm{Alb}(W/Z)$ au-dessus de Z, et un morphisme injectif : $\alpha_{W/Z} : W \to \mathrm{Alb}(W/Z)$ au-dessus de Z tels que $\alpha_u \circ \alpha_{Y/Z} = \alpha_{W/Z} \circ \alpha_{Y/Z} : Y \to \mathrm{Alb}(W/Z)$. L'application $u : Y \to W$ est surjective et une submersion à fibres des tores complexes au-dessus de l'ouvert $U \subset Z$ de lissité de sh_σ.

La variété $S_\rho(X) := W$ est bien de type général, puisque fibrée sur $Z = Sh_\sigma$ de type général, et à fibres génériques W_z de type général.

Pour conclure que la fibration obtenue $\tau : Sh_\rho(X) \to S_\rho(X)$ est biméromorphe à une fibration lisse, il suffit de remarquer que le groupe fondamental de la fibre générale de τ s'injecte dans celui de $Sh_\rho(X)$ (ceci vient du fait que $Sh_\rho(X)$ est la base d'un morphisme de Shafarevich). Nous pouvons alors appliquer l'énoncé [Nak99, Th. 7.8] qui nous fournit la conclusion souhaitée. □

Références

[ABCKT96] Jaume Amorós, Marc Burger, Kevin Corlette, Dieter Kotschick et Domingo Toledo *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs **44**, American Mathematical Society (1996).

[BKT12] Yohan Brunebarbe, Bruno Klingler et Burt Totaro, *Symmetric differentials and the fundamental group*, Duke Math. Journal, **162**(14) (2013) , 2797–2813.

[Cam81] Frédéric Campana, *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact.*, Invent. Math. **63** (1981), no. 2, 187–223.

[Cam85] ______, *Réduction d'Albanese d'un morphisme propre et faiblement kählérien. I et II*, Compositio Math. **54** (1985), no. 3, 373–416.

[Cam94] ______, *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), no. 2, 255–284.

[Cam95] ______, *Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28** (1995), no. 3, 307–316.

[Cam98] ______, *Connexité abélienne des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 4, 483–506.

[Cam01] ______, *Ensembles de Green-Lazarsfeld et quotients résolubles des groupes de Kähler*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 4, 599–622.

[Cam04] ______, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 499–630.

[Cam06] ______, *Isotrivialité de certaines familles kählériennes de variétés non projectives*, Math. Z. **252** (2006), no. 1, 147–156.

[Cam11a] ______, *Orbifoldes géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes*, J. Inst. Math. Jussieu **10** (2011), no. 4, 809–934.

[Cam11b] ______, *Quotients résolubles ou nilpotents des groupes de Kähler orbifoldes*, Manuscripta Math. **135** (2011), no. 1-2, 117–150.

[Cla08] Benoît Claudon, *Convexité holomorphe du revêtement de Malčev d'après S. Leroy*, arXiv :0809.0920, 2008.

[Cor88] Kevin Corlette *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Diff. Geo. **28** (1988), 361–382.

[Cor93] Kevin Corlette *Non abelian Hodge theory*, Proc.Symp. Pure Math. **54**, part 2 (1993), 125–140.

[Del68] Pierre Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 35, 259–278.

[Del71] ______, *Théorie de Hodge. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1971), no. 40, 5–57.

[Del10] Thomas Delzant, *L'invariant de Bieri-Neumann-Strebel des groupes fondamentaux des variétés kählériennes*, Math. Ann. **348** (2010), no. 1, 119–125.

[Eys04] Philippe Eyssidieux, *Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe*, Invent. Math. **156** (2004), no. 3, 503–564.

[Eys11] ______, *Lectures on the Shafarevich conjecture on uniformization*, in *Variétés complexes, feuilletages, uniformisation*, Panoramas et Synthèses **34/35** (2011), SMF, 101–148.

[Eys13] ______, *On the Uniformization of Compact Kähler Orbifolds.* Vietnam Journal of Mathematics, **41**(4) (2013) , 399-407.

[EKPR12] Philippe Eyssidieux, Ludmil Katzarkov, Tony Pantev et Mohan Ramachandran, *Linear Shafarevich Conjecture*, Annals of Math. **176** (2012), 1545–1581.

[Gro91] Mikhail Gromov, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 1, 263–292.

[GS92] Mikhail Gromov et Richard Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1992), no. 76, 165–246.

[Hai85] Richard M. Hain, *The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, pp. 247–282.

[Hai87] ———, *The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I*, K-Theory **1** (1987), no. 3, 271–324.

[Hit87] Nigel Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 59–126.

[JosZuo00] Jürgen Jost et Kang Zuo *Harmonic maps into Bruhat-Tits Buildings and Factorizations of p-Adically Unbounded and Non Rigid Representations of π_1 of Algebraic Varieties, I* J. Alg. Geom **9** (2000) 1-42.

[Kat97a] Ludmil Katzarkov, *Nilpotent groups and universal coverings of smooth projective varieties*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 2, 336–348.

[Kat97b] ———, *On the Shafarevich maps*, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 173–216.

[KatRam98] Ludmil Katzarkov et Mohan Ramachandran *On the universal coverings of algebraic surfaces*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **31** (1998), 525-535.

[Kaw81] Yujiro Kawamata, *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. **43** (1981), no. 2, 253–276.

[Kol87] János Kollár, *Subadditivity of the Kodaira dimension : fibers of general type*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, pp. 361–398.

[Kol93] ———, *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 177–215.

[LasRam96] Brandon Lasell et Mohan Ramachandran *Observations on harmonic maps and singular varieties*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **29** (1996), 135-148.

[LubMag85] Alexander Lubotzky et Andy R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **58** (1985), no. 336, xi+117.

[Nak99] Noboru Nakayama, *Compact Kähler manifolds whose universal covering spaces are biholomorphic to $\mathbb{C}^n$*, *RIMS* preprint, 1230, 1999.

[Sim92] Carlos T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1992), no. 75, 5–95.

[Sim93] ———, *Subspaces of moduli spaces of rank one local systems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **26** (1993), no. 3, 361–401.

[Sim94a] ———, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1994), no. 79, 47–129.

[Sim94b] ———, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1994), no. 80, 5–79.

[Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[Vie83] Eckart Viehweg, *Weak Positivity and the Additivity of the Kodaira Dimension for Certain Fibre Spaces*, Algebraic varieties and analytic varieties, Tokyo, 1981, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, pp. 329–353.

[Zuo96] Kang Zuo, *Kodaira dimension and Chern hyperbolicity of the Shafarevich maps for representations of π_1 of compact Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. **472** (1996), 139–156.

[Zuo99] ______, *Representations of fundamental groups of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1708, Springer-Verlag, 1999.

Fréderic Campana, Benoît Claudon, Université de Lorraine, Institut Élie Cartan Nancy, UMR 7502, B.P. 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

Philippe Eyssidieux, Institut Fourier, Université Grenoble 1, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France

E-mail address: `Frederic.Campana@univ-lorraine.fr`

E-mail address: `Benoit.Claudon@univ-lorraine.fr`

E-mail address: `Philippe.Eyssidieux@ujf-grenoble.fr`